

Math. P.

179.116

Die Functionen
Cosinus und Sinus beliebiger
Argumente
in elementarer Darstellung

von

R. Götting,

Professor am Gymnasium zu Torgau.

BERLIN 1881.

J. A. Wohlgemuth's Verlagsbuchhandlung
(Max Herbig).

Math. P. 179 ub

Goetting

Die Functionen
Cosinus und Sinus beliebiger
Argumente
in elementarer Darstellung

von

R. Götting,
Professor am Gymnasium zu Torgau.

BERLIN 1881.

J. A. Wohlgemuth's Verlagsbuchhandlung
(Max Herbig).



Vorwort.

Die als Cosinus und Sinus bezeichneten Zahlen (einschließlich derjenigen für imaginäre Argumente) sind im ersten Abschnitt aus zwei Reihen von Gleichungen (1) und (2) abgeleitet. Im zweiten Abschnitt finden sich Anwendungen auf eine Anzahl regelmäßiger Vielecke, im dritten die Formeln für die Cosinus und Sinus ganzer Vielfachen beliebiger Argumente, im vierten endlich die für jedes Argument gültigen Reihen. Bis zu diesem Punkte vorzuschreiten dürfte überall da wenigstens wünschenswert sein, wo es sich, wie auf den höheren Unterrichtsanstalten, nicht allein um eine gewisse Abrichtung und Einübung in dem Gebrauche trigonometrischer Formeln handelt.

Erster Abschnitt.

Die goniometrischen Zahlen im Allgemeinen.

1. Es bedeute a_0 stets die Zahl 2, a_1 eine beliebige reelle oder imaginäre Zahl ($u + vi$). Denkt man mittelst der Gleichungen

$$\begin{aligned} a_0 + a_2 &= a_1^2, \quad a_1 + a_3 = a_1 a_2, \quad a_2 + a_4 = a_1 a_3, \quad \dots, \\ a_{x-1} + a_{x+1} &= a_1 a_x, \dots \end{aligned} \quad (1)$$

der Reihe nach die Zahlen $a_2, a_3, a_4, \dots, a_{x+1}, \dots$, ferner mittelst

$$\begin{aligned} a_0 - a_2 &= b_1^2, \quad a_1 - a_3 = b_1 b_2, \quad a_2 - a_4 = b_1 b_3, \quad \dots, \\ a_{x-1} - a_{x+1} &= b_1 b_x, \dots \end{aligned} \quad (2)$$

die Zahlen $b_1, b_2, \dots, b_x, \dots$ ermittelt, wo das Vorzeichen des Wurzelwertes $b_1 = \sqrt{a_0 - a_2} = \sqrt{4 - a_1^2}$ beliebig gewählt werden kann, so besitzen die Zahlen a und b folgende Eigenschaften:

Durch Multiplication der ersten Gleichung (2) mit a_1^* , erhält man

$$a_1 b_1^2 = a_1 (a_0 - a_2) = 2 a_1 - a_1 a_2 = a_1 - a_3 = b_1 b_2;$$

hieraus folgt

$$b_2 = a_1 b_1.$$

Durch Addition der ersten und dritten Gleichung (2) ergibt sich

$$b_1 (b_1 + b_3) = a_0 - a_4,$$

und durch Subtraction der ersten und dritten Gleichung (1)

$$a_0 - a_4 = a_1 (a_1 - a_3) = a_1 b_1 b_2;$$

also wird, wenn man mit b_1 hebt,

$$b_1 + b_3 = a_1 b_2.$$

* Der Fall $a_1 = 0$, wo $a_2 = -2$ und $b_1 = 0$, wo $a_2 = +2$ ist, wird für sich betrachtet werden.

Ueberhaupt hat man

$$\begin{aligned} a_{x-2} - a_{x+2} &= b_1 (b_{x-1} + b_{x+1}), \\ a_{x-2} - a_{x+2} &= a_1 (a_{x-1} - a_{x+1}) = a_1 b_1 b_x, \end{aligned}$$

also jedesmal

$$(3) \quad b_{x-1} + b_{x+1} = a_1 b_x.$$

Wir fügen nun zu den bisher definierten Zahlen noch die folgende

$$b_0 = 0$$

hinzu. Dann gilt (weil $b_2 = a_1 b_1$ ist) die Gleichung

$$-b_0 + b_2 = b_1 a_1,$$

ferner hat man

$$-b_1 + b_3 = a_1 b_2 - 2b_1 = a_1^2 b_1 - a_0 b_1 = b_1 a_2.$$

Angenommen, es wäre bewiesen

$$-b_{x-2} + b_x = b_1 a_{x-1} \text{ und } -b_{x-1} + b_{x+1} = b_1 a_x,$$

so würde aus $(b_x + b_{x+2}) - (b_{x-2} + b_x) = a_1 b_{x+1} - a_1 b_{x-1}$ folgen

$$-b_x + b_{x+2} - b_{x-2} + b_x = a_1 (-b_{x-1} + b_{x+1})$$

oder auch

$$\begin{aligned} -b_x + b_{x+2} &= -b_1 a_{x-1} + a_1 b_1 a_x = -b_1 a_{x-1} + b_1 (a_{x-1} + a_{x+1}) \\ (4) \quad &= b_1 a_{x+1}. \end{aligned}$$

Nun war schon $-b_0 + b_2 = b_1 a_1$, $-b_1 + b_3 = b_1 a_2$; es muß also auch

$-b_2 + b_4 = b_1 a_3, \dots$ und allgemein $-b_x + b_{x+2} = b_1 a_{x+1}$ sein. Aus den Gleichungen (1) bis (4) resultieren sofort noch folgende

$$(5) \quad \begin{cases} a_1 a_x - b_1 b_x = 2 \cdot a_{x+1} \\ a_1 a_x + b_1 b_x = 2 \cdot a_{x-1} \\ a_1 b_x + b_1 a_x = 2 \cdot b_{x+1} \\ a_1 b_x - b_1 a_x = 2 \cdot b_{x-1}, \end{cases}$$

aus denen umgekehrt die vorhergehenden wieder abgeleitet werden können.

Nimmt man $a_1 = 0$, wo dann $a_2 = -2$ sein muß, so ergibt sich durch die Gleichungen (1) und (2)

$$\begin{aligned} a_1 &= -a_3 = a_5 = -a_7 = \dots = 0, \\ a_0 &= -a_2 = a_4 = -a_6 = \dots = 2, \\ b_1 &= -b_3 = b_5 = -b_7 = \dots = \pm 2, \\ b_0 &= -b_2 = b_4 = -b_6 = \dots = 0. \end{aligned}$$

Soll $b_1 = 0$ werden, wo dann $a_2 = a_0 = 2$ sein muss, so wird zunächst $a_1 = \pm 2$; weiter findet man mittelst der Gleichungen (2), deren rechte Seiten Null sind,

$$\begin{aligned} a_0 &= a_2 = a_4 = a_6 = \dots = 2, \\ a_1 &= a_3 = a_5 = a_7 = \dots = \pm 2; \end{aligned}$$

die Werte von b_2, b_3 u. s. w. können aber mittelst der Gleichungen (2) nicht ermittelt werden. Es werde deshalb festgesetzt, dass dieselben sämtlich Null sein sollen. Unter dieser Bedingung behalten die Gleichungen (5) auch in diesem Falle ihre Gültigkeit.

2. Wir erweitern nun zunächst das Gebiet der Größen a und b , indem wir auch negative Indices einführen, und festsetzen, dass

$$a_{-x} = a_x, \quad b_{-x} = -b_x$$

sein soll. Man kann leicht erkennen, dass dann die Gleichungen (1) und (2) unmittelbar angewandt werden können. Die Gleichung (3) tritt in der Gestalt auf

$$b_{-x-1} + b_{-x+1} = a_1 \cdot b_{-x} \text{ oder auch } = a_{-1} \cdot b_{-x}$$

identisch mit

$$-b_{x+1} - b_{x-1} = -a_1 \cdot b_x,$$

und ebenso die Gleichung (4) in der Gestalt

$$-b_{-x} + b_{-x+2} = b_{-1} \cdot a_{-x+1},$$

identisch mit

$$b_x - b_{x-2} = -b_1 \cdot a_{x-1}.$$

Dass x auch 0 sein darf, ergibt sich aus der Bestimmung $b_0 = 0$. In Folge dessen dürfen die Gleichungen (5) für alle positiven und negativen (ganzzahligen) Werte von x benutzt werden.

Multipliziert man jetzt, wenn $\sqrt{-1}$ mit i bezeichnet wird, die identische Gleichung

$$\frac{1}{2} a_1 + \frac{i}{2} b_1 = \frac{1}{2} a_1 + \frac{i}{2} b_1$$

mit $\left(\frac{1}{2} a_1 + \frac{i}{2} b_1\right)$, so erhält man

$$\left(\frac{1}{2} a_1 + \frac{i}{2} b_1\right)^2 = \frac{1}{4} a_1^2 - \frac{1}{4} b_1^2 + \frac{i}{2} a_1 b_1 = \frac{1}{2} a_2 + \frac{i}{2} b_2,$$

1*

indem nämlich $\frac{1}{4} a_1^2 - \frac{1}{4} b_1^2 = \frac{1}{2} a_2, \frac{i}{2} a_1 b_1 = \frac{i}{2} b_2$ zu setzen ist. Nimmt man

$$(6) \quad \left(\frac{1}{2} a_1 + \frac{i}{2} b_1 \right)^n = \frac{1}{2} a_n + \frac{i}{2} b_n$$

als bewiesen an, so folgt durch Multiplication mit $\left(\frac{1}{2} a_1 + \frac{i}{2} b_1 \right)$

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{2} a_1 + \frac{i}{2} b_1 \right)^{n+1} &= \frac{1}{4} a_n \cdot a_1 - \frac{1}{4} b_n \cdot b_1 + \frac{i}{4} a_n b_1 + \frac{i}{4} b_n a_1 \\ &= \frac{1}{2} a_{n+1} + \frac{i}{2} b_{n+1}, \end{aligned}$$

in Folge der Gleichungen (5). Die Gleichung (6) gilt aber für $n = 2$, also auch für $n + 1 = 3$ und dann ebenso für den Exponenten und Index 4 u. s. w. Operiert man ebenso mit

$$\frac{1}{2} a_1 - \frac{i}{2} b_1 = \frac{1}{2} a_1 - \frac{i}{2} b_1,$$

so erhält man

$$(6') \quad \left(\frac{1}{2} a_1 - \frac{i}{2} b_1 \right)^n = \frac{1}{2} a_n - \frac{i}{2} b_n$$

und durch Multiplication von (6) und (6')

$$\left(\frac{1}{4} a_1^2 + \frac{1}{4} b_1^2 \right)^n = \frac{1}{4} a_n^2 + \frac{1}{4} b_n^2.$$

Es ist aber $\frac{1}{4} a_1^2 + \frac{1}{4} b_1^2 = 1$; die Zahlen a und b besitzen also die bemerkenswerte Eigenschaft, daß jedesmal

$$\frac{1}{4} a_n^2 + \frac{1}{4} b_n^2 = 1$$

ist. Aus $\left(\frac{1}{2} a_1 + \frac{i}{2} b_1 \right) \cdot \left(\frac{1}{2} a_1 - \frac{i}{2} b_1 \right) = 1$ folgt noch

$$\frac{1}{2} a_1 - \frac{i}{2} b_1 = \frac{1}{\frac{1}{2} a_1 + \frac{i}{2} b_1} = \left(\frac{1}{2} a_1 + \frac{i}{2} b_1 \right)^{-1};$$

die Gleichung (6') kann also auch in der Form

$$\left(\frac{1}{2}a_1 - \frac{i}{2}b_1\right)^n = \frac{1}{2}a_n - \frac{i}{2}b_n = \frac{1}{2}a_{-n} + \frac{i}{2}b_{-n} =$$

$$\left(\frac{1}{2}a_1 + \frac{i}{2}b_1\right)^{-n}$$

angegeben werden. Der an $\frac{1}{2}a_1 + \frac{i}{2}b_1$ zu setzende Exponent darf demnach ebenso gut eine positive wie eine negative (ganze) Zahl sein. Dafs man auch den Index 1 in a_1 und b_1 negativ wählen kann und wie die hieraus entstehenden Gleichungen lauten, ist leicht zu erkennen.

Hiernach ist, wenn man unter z und λ irgend welche positive oder negative (ganze) Zahlen versteht,

$$\left(\frac{1}{2}a_1 \pm \frac{i}{2}b_1\right)^{z+\lambda} = \frac{1}{2}a_{z+\lambda} \pm \frac{i}{2}b_{z+\lambda},$$

$$\left(\frac{1}{2}a_1 \pm \frac{i}{2}b_1\right)^z = \frac{1}{2}a_z \pm \frac{i}{2}b_z$$

und

$$\left(\frac{1}{2}a_1 \pm \frac{i}{2}b_1\right)^\lambda = \frac{1}{2}a_\lambda \pm \frac{i}{2}b_\lambda;$$

durch Multiplication der beiden letzten Gleichungen erhält man

$$\left(\frac{1}{2}a_1 \pm \frac{i}{2}b_1\right)^{z+\lambda} = \frac{1}{4}a_z \cdot a_\lambda - \frac{1}{4}b_z \cdot b_\lambda \pm \frac{i}{4}(b_z \cdot a_\lambda + a_z \cdot b_\lambda).$$

Durch Gleichsetzung der Werte von $\left(\frac{1}{2}a_1 \pm \frac{i}{2}b_1\right)^{z+\lambda}$ ergibt sich

$$\frac{1}{2}a_{z+\lambda} + \frac{i}{2}b_{z+\lambda} = \left(\frac{1}{2}a_z \cdot \frac{1}{2}a_\lambda - \frac{1}{2}b_z \cdot \frac{1}{2}b_\lambda\right)$$

$$+ i \cdot \left(\frac{1}{2}b_z \cdot \frac{1}{2}a_\lambda + \frac{1}{2}a_z \cdot \frac{1}{2}b_\lambda\right)$$

$$\frac{1}{2}a_{z+\lambda} - \frac{i}{2}b_{z+\lambda} = \left(\frac{1}{2}a_z \cdot \frac{1}{2}a_\lambda - \frac{1}{2}b_z \cdot \frac{1}{2}b_\lambda\right)$$

$$- i \cdot \left(\frac{1}{2}b_z \cdot \frac{1}{2}a_\lambda + \frac{1}{2}a_z \cdot \frac{1}{2}b_\lambda\right)$$

und durch Addition und Subtraction der letzten Gleichungen

$$(7) \quad \begin{cases} a_{\kappa+\lambda} = \frac{1}{2} a_{\kappa} \cdot a_{\lambda} - \frac{1}{2} b_{\kappa} \cdot b_{\lambda} \\ b_{\kappa+\lambda} = \frac{1}{2} b_{\kappa} \cdot a_{\lambda} + \frac{1}{2} a_{\kappa} \cdot b_{\lambda} \end{cases}$$

wo κ und λ auch negativ sein dürfen.

3. Im Vorhergehenden ist nur für eine einzige Zahl ein bestimmter Wert angegeben, nämlich festgestellt, daß $a_0 = +2$ sein sollte. Wie man sieht, hängen dann die Werte der übrigen Zahlen durchaus von a_1 ab, wenn man noch verfügt, welches Vorzeichen für $\sqrt{a_0 - a_2} = b_1$ benutzt werden soll. Der Einfachheit wegen möge, wenn nichts anderes angegeben wird, stets das positive gemeint sein. In den unzählig vielen denkbaren Systemen der a und b treten bemerkenswerte Unterschiede auf, je nachdem man a_1 reell oder imaginär, und, bei reellem a_1 , je nachdem man a_1 zwischen -2 und $+2$ oder ausserhalb dieser Grenzen wählt. Wir wollen hier zunächst den auf der Grenze stehenden Fall

$$a_1 = +2$$

betrachten. Es ist dann auch $a_2 = +2$, also $b_1 = 0$; aus

$$a_1 + a_3 = a_1 a_2 = 4$$

folgt, daß auch $a_3 = +2$, ferner ganz ähnlich $a_4 = +2$ u. s. w., nämlich sämtliche a den Wert $+2$ besitzen. Ferner verdient eine spezielle Erwähnung der Fall

$$a_1 = -2.$$

Man findet dann $a_2 = +2$, während aus $a_1 + a_3 = a_1 a_2 = -4$ für a_3 wieder -2 , dann für a_4 der Wert $+2$ u. s. w. erhalten wird. Die a sind abwechselnd $+2$ und -2 und zwar positiv für gerade Indices, negativ für ungerade. Die Werte der b sind, wie in No. 1 festgestellt wurde, in beiden Fällen Null.

Es werde jetzt a_1 zwischen 0 und $+2$ genommen — (der Fall $a_1 = 0$ ist im Vorhergehenden schon erörtert); — dann ist $a_0 + a_2$ zwischen 0 und $+4$, also a_2 zwischen -2 und $+2$ enthalten und

$$b_1^2 = a_0 - a_2$$

positiv, d. h. b_1 reell; und da in Folge der Gleichungen (1)

sämtliche a reell sind, so müssen wegen der Gleichungen (2) auch $b_1 \cdot b_2$, $b_1 \cdot b_3$ u. s. w. reell, d. h. sämtliche b reell sein.

Falls a_1 zwischen 0 und -2 , also a_1^2 zwischen 0 und $+4$ liegt, werden gleichfalls sämtliche a und b reell. Man hat nun noch

$$\frac{1}{4}a_x^2 + \frac{1}{4}b_x^2 = 1, \quad a_x^2 + b_x^2 = 4;$$

Die Werte der a und b liegen demnach zwischen -2 und $+2$, diese Grenzen mit eingeschlossen.

4. Wir wollen jetzt, wenn $a_1 > +2$ genommen wird, der grösseren Deutlichkeit wegen überall α statt a , β statt b schreiben. Man hat dann

$$\begin{aligned} \alpha_0 + \alpha_2 &= \alpha_1^2, \quad \alpha_1 + \alpha_3 = \alpha_1 \alpha_2, \quad \alpha_2 + \alpha_4 = \alpha_1 \alpha_3, \dots \\ \alpha_0 - \alpha_2 &= \beta_1^2, \quad \alpha_1 - \alpha_3 = \beta_1 \beta_2, \quad \alpha_2 - \alpha_4 = \beta_1 \beta_3, \dots \end{aligned}$$

wo $\alpha_0 = 2$ ist. Zunächst sieht man, dass

$$\alpha_2 = \alpha_1^2 - 2 > \alpha_1^2 - \alpha_1, \quad \text{d. i.} > \alpha_1 (\alpha_1 - 1).$$

Nun ist aber $\alpha_1 - 1 > 1$, also

$$\alpha_2 > \alpha_1 > +2.$$

Weiter hat man für jeden beliebigen Index

$$\alpha_{x+1} = \alpha_1 \alpha_x - \alpha_{x-1} = \alpha_x + (\alpha_1 - 1) \alpha_x - \alpha_{x-1}.$$

Ist nun $\alpha_x > \alpha_{x-1}$, so muss $(\alpha_1 - 1) \alpha_x - \alpha_{x-1}$ positiv, d. h. $\alpha_{x+1} > \alpha_x$ sein. Da aber schon $\alpha_2 > \alpha_1$ feststeht, so erhält man $\alpha_3 > \alpha_2$, $\alpha_4 > \alpha_3$ u. s. w., d. h. die α bilden eine immerfort steigende Reihe positiver* Zahlen.

Was die Werte der β betrifft (β_0 soll wieder Null bedeuten), so hat man

$$\beta_1^2 = \alpha_0 - \alpha_2 \text{ negativ} = -\gamma_1^2;$$

man kann also $\beta_1 = i\gamma_1$ setzen, wo γ_1 sowohl positiv als auch negativ sein kann. Schreibt man nun $i\gamma_x$ statt β_x , so erhält man

$$\alpha_{x-1} - \alpha_{x+1} = i^2 \cdot \gamma_1 \cdot \gamma_x = -\gamma_1 \cdot \gamma_x,$$

demnach wird, (weil $\alpha_{x-1} < \alpha_{x+1}$), $\gamma_1 \cdot \gamma_x$ positiv und γ_x besitzt jedesmal dasselbe Vorzeichen wie γ_1 . Es ist aber

* Negative Werte von α_1 unter -2 wollen wir ganz ausschliessen. Doch mag bemerkt werden, dass man, wenn man dann $\alpha_0 = -2$ nähme, den eben durchgeführten ganz entsprechende Resultate erhalten würde.

$$\alpha_z^2 + \beta_z^2 = \alpha_z^2 - \gamma_z^2 = 4,$$

dabei nehmen die Werte von α_z mit steigendem Index fortwährend zu; die absoluten Werte von γ_z (positiv, wenn γ_1 positiv, negativ, wenn γ_1 negativ) müssen also gleichzeitig beständig wachsen. Die Gleichungen (6) und (6') lauten, wenn man $i\gamma_z$ statt β_z schreibt,

$$\left(\frac{1}{2} \alpha_1 \mp \frac{1}{2} \gamma_1\right)^2 = \frac{1}{2} \alpha_z \mp \frac{1}{2} \gamma_z;$$

auch in den übrigen bisher aufgestellten Gleichungen lassen sich die entsprechenden Änderungen leicht ausführen, beispielsweise in den Gleichungen (7), welche, wenn man die zweite derselben mit i hebt,

$$\alpha_z \pm \lambda = \frac{1}{2} \alpha_z \alpha_\lambda \pm \frac{1}{2} \gamma_z \gamma_\lambda$$

$$\gamma_z \pm \lambda = \frac{1}{2} \gamma_z \alpha_\lambda \pm \frac{1}{2} \alpha_z \gamma_\lambda$$

lauten werden.

5. Weiter nehmen wir a_1 (es soll aber jetzt überall A statt a , B statt b geschrieben werden) imaginär $= u + vi = A_1$, wo v nicht Null sein soll. Bestimmt man, wenn u zunächst positiv genommen wird.

$$(8) \quad \left\{ \begin{array}{l} a_1 = + \sqrt{\left(1 + \frac{u}{2}\right)^2 + \frac{v^2}{4}} - \sqrt{\left(1 - \frac{u}{2}\right)^2 + \frac{v^2}{4}} \\ \quad = + \sqrt{\left(\frac{u}{2} + 1\right)^2 + \frac{v^2}{4}} - \sqrt{\left(\frac{u}{2} - 1\right)^2 + \frac{v^2}{4}} \\ \alpha_1 = + \sqrt{\left(1 + \frac{u}{2}\right)^2 + \frac{v^2}{4}} + \sqrt{\left(1 - \frac{u}{2}\right)^2 + \frac{v^2}{4}} \\ \quad = + \sqrt{\left(\frac{u}{2} + 1\right)^2 + \frac{v^2}{4}} + \sqrt{\left(\frac{u}{2} - 1\right)^2 + \frac{v^2}{4}}, \end{array} \right.$$

so ist jedesmal

$$a_1 \cdot \alpha_1 = 2u.$$

Wählt man jetzt $u < 2$, so ist $\alpha_1 > \left(1 + \frac{u}{2}\right) + \left(1 - \frac{u}{2}\right)$ d. i. > 2 , folglich

$$a_1 < \frac{2u}{2} \text{ d. i. } < 2.$$

Für $u = 2$ hat man wieder $\alpha_1 > 2$, also $a_1 = \frac{4}{\alpha_1} < 2$, während sich auch für $u > 2$ ergibt, daß $\alpha_1 > \left(\frac{u}{2} + 1\right) + \left(\frac{u}{2} - 1\right)$, also $\alpha_1 > u > 2$ und $a_1 < 2$ sein muß. Ist u negativ gleich $-u'$ (wo u' positiv), so nehmen wir, weil dann ersichtlich auch a_1 negativ wird, hierfür $a_1 = -a_1'$ (wo a_1' positiv). Für u' und a_1' gelten dann genau dieselben Betrachtungen, wie für u und a_1 . Es können demnach, wenn

$$A_1 = u + vi$$

gegeben ist, jedesmal mittelst der Gleichungen (8) zwei bestimmte reelle Zahlen a_1 zwischen -2 und $+2$ und $\alpha_1 > 2$ ermittelt werden, für welche nach dem Vorhergehenden schon die Gleichung $a_1 \cdot \alpha_1 = 2u$ feststeht. Wir bestimmen jetzt drei Grössen b_1 , β_1 und γ_1 mittelst der Gleichungen

$$b_1^2 = 4 - a_1^2, \quad \beta_1^2 = 4 - \alpha_1^2 = -\gamma_1^2.$$

Die Vorzeichen von b_1 und $\beta_1 = i\gamma_1$ können willkürlich*) gewählt werden. Bildet man aus den Gleichungen (8) die Summe $a_1^2 + \alpha_1^2$, so wird

$$a_1^2 + \alpha_1^2 = 4 + u^2 + v^2,$$

woraus, da $u^2 = \frac{1}{4} a_1^2 \alpha_1^2$ ist,

$$\begin{aligned} v^2 &= \alpha_1^2 - \frac{1}{4} a_1^2 \alpha_1^2 - 4 + a_1^2 = \frac{1}{4} (\alpha_1^2 - 4) (4 - a_1^2) \\ &= \frac{1}{4} b_1^2 \cdot \gamma_1^2, \\ v &= \pm \frac{1}{2} b_1 \gamma_1 \end{aligned} \tag{8'}$$

abgeleitet wird. Man hat demnach

$$A_1 = u + vi = \frac{1}{2} a_1 \alpha_1 \pm \frac{1}{2} b_1 \gamma_1. \tag{8''}$$

Weiter führen wir eine Grösse B_1 ein mittelst der Gleichung

$$B_1 = \frac{1}{2} b_1 \alpha_1 \mp \frac{1}{2} a_1 \gamma_1. \tag{8'''}$$

* Man benutze aber, wenn nichts anderes gesagt wird, das positive Vorzeichen.

Dann erhält man

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{2} A_1 + \frac{i}{2} B_1 &= \frac{1}{4} a_1 \alpha_1 \pm \frac{1}{4} a_1 \gamma_1 + \frac{i}{4} b_1 \alpha_1 \pm \frac{i}{4} b_1 \gamma_1 \\
 &= \frac{1}{2} \alpha_1 \left(\frac{1}{2} a_1 + \frac{i}{2} b_1 \right) \pm \frac{1}{2} \gamma_1 \left(\frac{1}{2} a_1 + \frac{i}{2} b_1 \right) \\
 &= \left(\frac{1}{2} \alpha_1 \pm \frac{1}{2} \gamma_1 \right) \left(\frac{1}{2} a_1 + \frac{i}{2} b_1 \right), \\
 \frac{1}{2} A_1 - \frac{i}{2} B_1 &= \frac{1}{4} a_1 \alpha_1 \pm \frac{1}{4} a_1 \gamma_1 - \frac{i}{4} b_1 \alpha_1 \pm \frac{i}{4} b_1 \gamma_1 \\
 &= \left(\frac{1}{2} \alpha_1 \mp \frac{1}{2} \gamma_1 \right) \left(\frac{1}{2} a_1 - \frac{i}{2} b_1 \right),
 \end{aligned}$$

woraus durch Multiplication

$$\frac{1}{4} A_1^2 + \frac{1}{4} B_1^2 = \left(\frac{1}{4} \alpha_1^2 - \frac{1}{4} \gamma_1^2 \right) \left(\frac{1}{4} a_1^2 + \frac{1}{4} b_1^2 \right) = 1$$

abgeleitet wird. Die Gleichungen (6) und (6') liefern

$$\begin{aligned}
 (9) \quad \left(\frac{1}{2} A_1 + \frac{i}{2} B_1 \right)^n &= \frac{1}{2} A_n + \frac{i}{2} B_n, \\
 \left(\frac{1}{2} A_1 - \frac{i}{2} B_1 \right)^n &= \frac{1}{2} A_n - \frac{i}{2} B_n,
 \end{aligned}$$

während dieselben n^{ten} Potenzen wegen der vorher ermittelten Gleichungen die Resultate

$$\begin{aligned}
 \left(\frac{1}{2} A_1 + \frac{i}{2} B_1 \right)^n &= \left(\frac{1}{2} \alpha_n \pm \frac{1}{2} \gamma_n \right) \cdot \left(\frac{1}{2} a_n + \frac{i}{2} b_n \right) \\
 \left(\frac{1}{2} A_1 - \frac{i}{2} B_1 \right)^n &= \left(\frac{1}{2} \alpha_n \mp \frac{1}{2} \gamma_n \right) \cdot \left(\frac{1}{2} a_n - \frac{i}{2} b_n \right)
 \end{aligned}$$

ergeben. Durch Ausführung der letzten Multiplicationen findet man schliesslich

$$(9') \quad \begin{cases} A_n = \frac{1}{2} a_n \cdot \alpha_n \pm \frac{i}{2} b_n \cdot \gamma_n \\ B_n = \frac{1}{2} b_n \cdot \alpha_n \mp \frac{i}{2} a_n \cdot \gamma_n \end{cases}$$

Die Ermittlung der Werte von A_n und B_n , wenn A_1 imaginär (gleich $u + vi$) genommen wird, ist also auf die der $a_n, b_n, \alpha_n, \gamma_n$, wo a_1 zwischen -2 und $+2$ liegt und $\alpha_1 > 2$ ist, zurückgeführt.

6. Wir gehen jetzt zu dem in No. 3 betrachteten Falle zurück, in welchem alle Werte a und b reell waren, und nehmen $a_2 = 2$. Dann ist

$$a_1^2 = a_0 + a_2 = 4, \quad a_1 = \pm 2.$$

Um nicht zu dem schon behandelten Falle $a_1 = +2$, wo alle a gleich $+2$, alle b gleich Null waren, zurückzukommen, nehmen wir $a_1 = -2$. Alle b werden Null, die a abwechselnd $+2$ und -2 , was in No. 3 schon ausgeführt ist.

Setzt man weiter $a_2 = -2$, wobei $a_1 = 0$ wird, so sind (in No. 1) schon die Werte der a und b dargestellt.

Neue Resultate aber treten auf, wenn man

$$a_2 = 0$$

nimmt. Es möge bei dieser und den folgenden Entwicklungen festgestellt werden, daß man, wenn a_1 und b_1 durch eine Quadratwurzel ausgedrückt werden, jedesmal den positiven Wert derselben benutze. Hiernach hat man jetzt

$$a_1 = \sqrt{a_0 - a_2} = +\sqrt{2}, \quad b_1 = +\sqrt{4 - a_1^2} = +\sqrt{2}.$$

Nimmt man ferner

$$a_2 = +\sqrt{2},$$

$$\text{so erhält man } a_1 = +\sqrt{2 + \sqrt{2}}, \quad b_1 = +\sqrt{2 - \sqrt{2}},$$

dann ähnlich

$$a_1 = +\sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2}}}, \quad b_1 = +\sqrt{2 - \sqrt{2 + \sqrt{2}}},$$

$$\text{wenn } a_2 = +\sqrt{2 + \sqrt{2}},$$

nämlich gleich dem vorher für a_1 bestimmten Werte, u. s. w. Geht man umgekehrt von

$$\left. \begin{aligned} a_1 &= +\sqrt{2_{n-1} + \sqrt{2_{n-2} + \sqrt{\dots + \sqrt{2_1}}}} \\ b_1 &= +\sqrt{2_{n-1} - \sqrt{2_{n-2} + \sqrt{\dots + \sqrt{2_1}}}} \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

aus, wo die an die Ziffern 2 geschriebenen Indices $n-1$, $n-2$,

u. s. w. anzeigen sollen, wie viel Wurzelzeichen, jedes in dem vorhergehenden enthalten, zu benutzen sind, so folgt aus

$$a_2 = a_1^2 - a_0 = a_1^2 - 2_{n-1},$$

dafs man, um a_2 zu erhalten, bei a_1 das erste Wurzelzeichen und 2_{n-1} fortzulassen hat. Da weiter, wegen

$$a_{x+x} = \frac{1}{2} a_x \cdot a_x - \frac{1}{2} b_x \cdot b_x = a_x^2 - 2,$$

$$a_4 = a_2^2 - 2 (= a_2^2 - 2_{n-2})$$

sein mufs, so hat man, um den Wert von a_4 zu erhalten, wieder ein Wurzelzeichen und 2_{n-2} fortzulassen. Dieselbe Operation führt der Reihe nach auf

$$(11) \quad a_8 (= a_{2^3}), a_{16} (= a_{2^4}), \dots, a_{2^n-2} = + \sqrt{2_1}.$$

Aus dem letzten Ausdrucke folgt

$$(12) \quad a_{2^n-1} = a_{2^n-2}^2 - 2 = 0,$$

hieraus ebenso

$$(13) \quad a_{2^n} = a_{2^n-1}^2 - 2 = -2,$$

und schliesslich

$$(14) \quad a_{2^n+1} = a_{2^n}^2 - 2 = +2.$$

7. Der Wert von a_1 wächst fortwährend, je gröfser n genommen wird, bleibt aber jedenfalls unter $+2$. Um festzustellen, wie nahe er an 2 rücken kann, gehen wir von folgenden zwei Sätzen aus. Wenn x eine positive (ganze) Zahl bedeutet, so ist erstens

$$4 - \frac{1}{2^{2x-1}} - \frac{1}{2^{2x+1}} - \dots - \frac{1}{2^{4x-1}} \\ > \left(2 - \frac{1}{2^{2x+1}} - \frac{1}{2^{2x+3}} - \dots - \frac{1}{2^{4x+1}} - \frac{1}{2^{4x+3}} \right)^2.$$

Die rechte Seite nimmt nämlich durch Ausführung der zweiten Potenz den Wert an

$$4 - 4 \left(\frac{1}{2^{2x+1}} + \frac{1}{2^{2x+3}} + \dots + \frac{1}{2^{4x+1}} + \frac{1}{2^{4x+3}} \right) \\ + \left(\frac{1}{2^{2x+1}} + \dots + \frac{1}{2^{4x+3}} \right)^2 = 4 - \frac{1}{2^{2x-1}} - \frac{1}{2^{2x+1}} - \dots \\ - \frac{1}{2^{4x-1}} - \frac{1}{2^{4x+1}} + \left(\frac{1}{2^{2x+1}} + \dots + \frac{1}{2^{4x+3}} \right)^2.$$

Nun ist die in der letzten Klammer stehende geometrische Reihe jedenfalls kleiner als $\frac{4}{3} \cdot \frac{1}{2^{2x}+1}$, ihr Quadrat also kleiner als $\frac{16}{9} \cdot \frac{1}{2^{4x}+2}$; abgesehen von den auf beiden Seiten der oben aufgestellten Ungleichung gemeinschaftlichen Gliedern von 4 bis $\frac{1}{2^{4x}-1}$ ist aber $\frac{1}{2^{4x}+1} > \frac{16}{9} \cdot \frac{1}{2^{4x}+2}$, weil $\frac{16}{9} < 2$ ist. Demnach ist $-\frac{1}{2^{4x}+1} + \left(\frac{1}{2^{2x}+1} + \dots + \frac{1}{2^{4x}+3}\right)^2$ jedenfalls negativ und die Behauptung bewiesen. Man hat nun

$$\sqrt{2_1} > 2 - \frac{1}{2^1} - \frac{1}{2^3} \left(\text{weil } 2 > 4 - 2 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{64} \right);$$

hieraus findet man, indem man links und rechts 2 addiert und die Wurzel nimmt,

$$\sqrt{2_2 + \sqrt{2_1}} > \sqrt{4 - \frac{1}{2^1} - \frac{1}{2^3}} > 2 - \frac{1}{2^3} - \frac{1}{2^5} - \frac{1}{2^7}$$

in Folge des eben bewiesenen Satzes; ferner ebenso

$$\begin{aligned} \sqrt{2_3 + \sqrt{2_2 + \sqrt{2_1}}} &> \sqrt{4 - \frac{1}{2^3} - \frac{1}{2^5} - \frac{1}{2^7}} \\ &> 2 - \frac{1}{2^5} - \frac{1}{2^7} - \frac{1}{2^9} - \frac{1}{2^{11}} \end{aligned}$$

und in derselben Art weiter schließend

$$\sqrt{2_{n-1} + \dots + \sqrt{2_1}} > 2 - \frac{1}{2^{2n-3}} - \frac{1}{2^{2n-1}} - \dots - \frac{1}{2^{4n-5}}.$$

Zweitens soll bewiesen werden, daß

$$\begin{aligned} &4 - \frac{1}{2^{2x-1}} - \frac{1}{2^{2x+2}} - \frac{1}{2^{2x+4}} - \dots - \frac{1}{2^{4x}} \\ &< \left(2 - \frac{1}{2^{2x+1}} - \frac{1}{2^{2x+4}} - \frac{1}{2^{2x+6}} - \dots - \frac{1}{2^{4x+4}} \right)^2. \end{aligned}$$

Die rechte Seite ist gleich $4 - \frac{1}{2^{2x-1}} - \frac{1}{2^{2x+2}} - \frac{1}{2^{2x+4}} - \dots$
 $- \frac{1}{2^{4x}} - \frac{1}{2^{4x+2}} + \left(\frac{1}{2^{2x+1}} + \dots \right)^2$; da das Quadrat der letzten

Klammer sicher gröfser als $\frac{1}{2^{4z+2}}$ ist, so ist die Behauptung bewiesen. Aus

$$\sqrt{2_1} < 2 - \frac{1}{2^1} - \frac{1}{2^4}$$

folgt dann ähnlich wie vorhin

$$\sqrt{2_2 + \sqrt{2_1}} < \sqrt{4 - \frac{1}{2^1} - \frac{1}{2^4}} < 2 - \frac{1}{2^3} - \frac{1}{2^6} - \frac{1}{2^8},$$

$$\begin{aligned} \sqrt{2_3 + \sqrt{2_2 + \sqrt{2_1}}} &< \sqrt{4 - \frac{1}{2^3} - \frac{1}{2^6} - \frac{1}{2^8}} \\ &< 2 - \frac{1}{2^5} - \frac{1}{2^8} - \frac{1}{2^{10}} - \frac{1}{2^{12}}, \end{aligned}$$

.

$$\sqrt{2_{n-1} + \dots + \sqrt{2_1}} < 2 - \frac{1}{2^{2n-3}} - \frac{1}{2^{2n}} - \dots - \frac{1}{2^{4n-4}}.$$

Die Summe der (geometrischen) Reihe $\frac{1}{2^{2n-1}} + \frac{1}{2^{2n+1}} + \dots + \frac{1}{2^{4n-5}}$ ist aber

$$\begin{aligned} \frac{1}{2^{2n-1}} \left(1 + \frac{1}{4} + \dots + \left(\frac{1}{4} \right)^{n-2} \right) &= \frac{1}{2^{2n-1}} \cdot \frac{4}{3} \left(1 - \left(\frac{1}{4} \right)^{n-1} \right) \\ &= \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2^{2n-3}} - \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2^{4n-5}}, \end{aligned}$$

während die (halb so grofse) Reihe

$$\frac{1}{2^{2n}} + \frac{1}{2^{2n+2}} + \dots + \frac{1}{2^{4n-4}} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2^{2n-2}} - \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2^{4n-4}}$$

ist. Aus beiden Entwicklungen geht hervor, dafs

$$a_1 > 2 - \frac{1}{2^{2n-3}} - \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2^{2n-3}} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2^{4n-5}}$$

$$\text{d. i.} > 2 - \frac{4}{3} \cdot \frac{1}{2^{2n-3}} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2^{4n-5}}$$

$$a_1 < 2 - \frac{1}{2^{2n-3}} - \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2^{2n-2}} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2^{4n-4}}$$

$$\text{d. i.} < 2 - \frac{7}{6} \cdot \frac{1}{2^{2n-3}} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2^{4n-4}}.$$

Was b_1 betrifft, so hat man $b_1^2 = 4 - a_1^2$, also

$$b_1^2 < 4 - \left(4 - \frac{4}{3} \cdot \frac{1}{2^{2n-5}} + \dots \right) \text{d. i.} < \frac{4}{3} \cdot \frac{1}{2^{2n-5}} - \dots$$

$$b_1^2 > 4 - \left(4 - \frac{7}{6} \cdot \frac{1}{2^{2n-5}} + \dots \right) \text{d. i.} > \frac{7}{6} \cdot \frac{1}{2^{2n-5}} - \dots$$

Die durch die Punkte angedeuteten Glieder können durch wirkliche Durchführung der Rechnung leicht angegeben werden. Man erkennt, daß sich, wenn man n größer und größer wählt, a_1 immer weniger von 2, b_1 immer weniger von Null unterscheidet; auch läßt sich jedesmal angeben, welchen Wert n höchstens besitzen muß, wenn die Abweichung von den genannten Zahlen einen beliebig klein gegebenen Wert nicht überschreiten soll.

8. Wir denken jetzt eine Tabelle der Zahlen

$$\left(\frac{1}{2} a_0 + \frac{i}{2} b_0 \right), \left(\frac{1}{2} a_1 + \frac{i}{2} b_1 \right), \left(\frac{1}{2} a_1 + \frac{i}{2} b_1 \right)^2 = \frac{1}{2} a_2 + \frac{i}{2} b_2;$$

$$\text{u. s. w.} \left(\frac{1}{2} a_1 + \frac{i}{2} b_1 \right)^{2^n+1} = \frac{1}{2} a_{2^n+1} + \frac{i}{2} b_{2^n+1}$$

aufgestellt. Der Wert der Grössen $\frac{1}{2} a$ nimmt, zunächst wenigstens, von 1 an ab, der Wert der Grössen $\frac{1}{2} b^*$ von Null an zu. Daß und wie lange dies der Fall ist, erkennt man folgendermaassen. Sind die beiden in

$$\left(\frac{1}{2} a_1 + \frac{i}{2} b_1 \right)^x = \frac{1}{2} a_x + \frac{i}{2} b_x$$

enthaltenen Zahlen a_x und b_x positiv, so erkennt man, daß in

$$\frac{1}{2} a_{x+1} = \frac{1}{2} a_1 \cdot \frac{1}{2} a_x - \frac{1}{2} b_1 \cdot \frac{1}{2} b_x,$$

$$\frac{1}{2} b_{x+1} = \frac{1}{2} a_1 \cdot \frac{1}{2} b_x + \frac{1}{2} b_1 \cdot \frac{1}{2} a_x$$

*) b_1 soll von jetzt ab stets positiv genommen werden.

$\frac{1}{2} a_{x+1}$ sicher kleiner als $\frac{1}{2} a_x$, weil $\frac{1}{2} a_1 < 1$ und $\frac{1}{2} b_1 \cdot \frac{1}{2} b_x$ positiv ist. Gleichzeitig ist $\frac{1}{2} b_{x+1}$ positiv (weil rechts nur positive Zahlen stehen) und deshalb wegen der Gleichungen $\left(\frac{1}{2} a_x\right)^2 + \frac{1}{2} (b_x)^2 = 1 = \left(\frac{1}{2} a_{x+1}\right)^2 + \left(\frac{1}{2} b_{x+1}\right)^2$ der Wert $\frac{1}{2} b_{x+1} > \frac{1}{2} b_x$.

So lange also die Zahlen $\frac{1}{2} a_0, \frac{1}{2} a_1, \dots, \frac{1}{2} a_x$ u. s. w., $\frac{1}{2} b_0, \frac{1}{2} b_1, \dots, \frac{1}{2} b_x$ u. s. w. positiv bleiben, bilden die ersteren eine von 1 an abnehmende, die letzteren eine von Null an zunehmende Reihe.

Wir wollen jetzt die Möglichkeit in's Auge fassen, daß die Reihe der Werte a einmal bis zu einer solchen Stelle führe, daß

$$a_x = 0$$

wäre. Die Existenz solcher Reihen ist durch Gleichung (12) in Nr. 6 schon dargethan. In diesem Falle hätte man

$$a_{x-1} + a_{x+1} = 0, \text{ also } a_{x+1} = -a_{x-1}.$$

Die nun folgende Gleichung

$$a_{x+2} + 0 = a_1 \cdot a_{x+1} = -a_1 \cdot a_{x-1} = -a_{x-2} - a_x = -a_{x-2}$$

zeigt dann, daß $a_{x+2} = -a_{x-2}$ sein muß; weiter hat man

$$a_{x+3} + a_{x+1} = a_1 \cdot a_{x+2} \text{ oder } a_{x+3} - a_{x-1} = -a_1 \cdot a_{x-2},$$

woraus in Verbindung mit $-a_{x-3} - a_{x-1} = -a_1 \cdot a_{x-2}$ die Gleichung

$$a_{x+3} = -a_{x-3}$$

folgt u. s. w., jedenfalls zunächst bis zu der Stelle, an welcher a_{x+x} oder $a_{2x} = -a_0 = -2$ auftritt. Da aber für negative Indices die Gültigkeit der Gleichungen (1) schon nachgewiesen ist, so steht nichts im Wege, die allgemeinere Gleichung (für jeden Wert von λ)

$$a_{x+\lambda} = -a_{x-\lambda} = -a_{\lambda-x} \text{ (wenn } \lambda > x \text{ sein sollte)}$$

aufzustellen. Wird also $a_x = 0$, so haben die Zahlen

$$\frac{1}{2} a_0, \frac{1}{2} a_1, \frac{1}{2} a_2, \text{ u. s. w.}$$

die Eigenschaft, daß sie zuerst von 1 bis 0 abnehmen, ferner von 0 bis -1 gleichfalls abnehmen, darauf von -1 bis 0, dann von 0 bis $+1$ zunehmen. Derselbe Prozeß muß sich fortwährend wiederholen und zwar sind die Grenzpunkte markiert durch

$$\frac{1}{2} a_0 = 1, \frac{1}{2} a_x = 0, \frac{1}{2} a_{2x} = -1, \frac{1}{2} a_{3x} = 0; \frac{1}{2} a_{4x} = +1$$

u. s. w.

Was dann die Zahlen $\frac{1}{2}b$ betrifft, welche mit den eben betrachteten mittelst der Gleichung

$$\left(\frac{1}{2}b\right)^2 + \left(\frac{1}{2}a\right)^2 = 1$$

zusammenhängen, so ist zunächst $\frac{1}{2}b_0 = 0$. Während nun $\frac{1}{2}a$ abnimmt, muß $\frac{1}{2}b$ wachsen (weil b_1 positiv sein sollte) und zwar zunächst bis

$$\frac{1}{2}b_x = +1.$$

Die jetzt folgenden Werte der a sind aber so beschaffen, daß in

$$a_{\lambda-1} - a_{\lambda+1} = b_1 \cdot b_\lambda$$

die Differenz linker Seits positiv ist. Die Werte der Größen $\frac{1}{2}b$ bleiben also zunächst positiv, müssen aber, weil $\left(\frac{1}{2}a\right)^2$ wächst, von $+1$ an abnehmen und zwar bis 0, was eintritt, sobald $a_{\lambda-1} = a_{\lambda+1}$ geworden ist. Dies ist der Fall für $\lambda - 1 = 2x - 1$, $\lambda + 1 = 2x + 1$, wo $a_{2x-1} = a_{2x+1}$, also

$$\frac{1}{2}b_{2x} = 0 \quad (\text{gleichzeitig mit } \frac{1}{2}a_{2x} = -1)$$

wird. Darüber hinaus wachsen die Werte der a ; es müssen also die der b negativ werden und zwar bis

$$\frac{1}{2}b_{3x} = -1 \quad (\text{gleichzeitig mit } \frac{1}{2}a_{3x} = 0)$$

geworden ist. Zunächst bleiben die b negativ, weil die a zu-

nehmen; sobald $\frac{1}{2}a_{4x} = +1$ geworden ist, hat man $\frac{1}{2}b_{4x} = 0$ zu setzen. Von hier ab wiederholen sich ersichtlich sämtliche Werte und zwar sind die Merkpunkte

$$\frac{1}{2}b_0 = 0, \frac{1}{2}b_x = +1, \frac{1}{2}b_{2x} = 0, \frac{1}{2}b_{3x} = -1; \frac{1}{2}b_{4x} = 0$$

u. s. w.

Die Vorzeichenfolgen* der Gröfsen $\frac{1}{2}a$ und die Grenzen ihrer Werte sind dieselben wie diejenigen, welche die Funktion $\cos$ besitzt, nämlich

$$\cos 0 = +1, \cos \frac{\pi}{2} = 0, \cos \pi = -1, \cos \frac{3\pi}{2} = 0; \cos 2\pi = +1$$

u. s. w.

ebenso sind die Vorzeichen* der $\frac{1}{2}b$ und die Grenzen ihrer Werte dieselben, wie diejenigen der Funktion $\sin$, nämlich

$$\sin 0 = 0, \sin \frac{\pi}{2} = +1, \sin \pi = 0, \sin \frac{3\pi}{2} = -1; \sin 2\pi = 0$$

u. s. w.

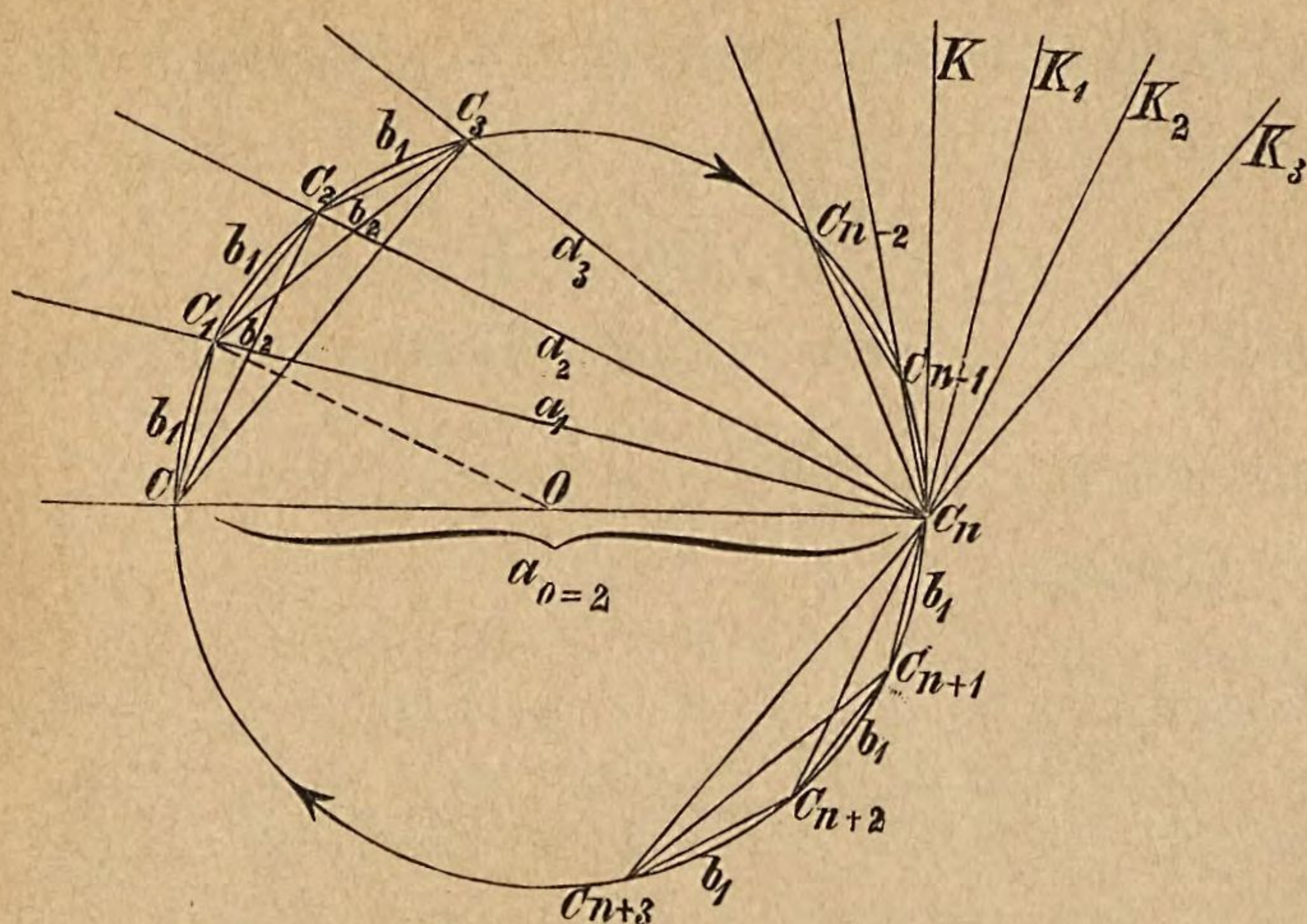
Es soll nun zu dem Beweise der Identität von $\frac{1}{2}a$ mit $\cos$, $\frac{1}{2}b$ mit $\sin$, geschritten werden.

9. Die Peripherie eines Kreises mit dem Durchmesser $CC_n = a_0 = 2$ werde in $2n$ gleiche Teile geteilt; auf den Halbkreis kommen deren also n . Die Teilpunkte seien $C_1, C_2, \dots, C_{n-1}, C_n$ u. s. w. Dann ist die Sehne CC_1 , die mit b_1 bezeichnet werden soll, die Seite des regelmäßigen $2n$ Ecks. Die Strecke $C_n C_1$ nennen wir a_1 , wobei $a_1^2 + b_1^2 = 4 = a_0^2$.

Da $\triangle CC_1 C_2 \sim C_1 OC_n$, so hat man $\frac{CC_2}{a_1} = \frac{b_1}{OC_1}$ oder

(weil $OC_1 = 1$) $CC_2 = a_1 b_1 = b_2$; eben so groß sind $C_1 C_3$,

* Obgleich man sich die Vorzeichenfolgen bei $\cos$ und $\sin$ durch die Lage von Linien zu verdeutlichen sucht, so würde dies allein durchaus kein zwingender Grund für ihre Annahme sein.



....., $C_{n-2} C_n$ u. s. w. Aus dem Sehnenviereck $CC_1 C_2 C_n$ folgt nun

$$a_0 \cdot b_1 + b_1 \cdot C_2 C_n = a_1 b_2 = a_1^2 b_1 \text{ oder } a_0 + C_2 C_n = a_1^2;$$

durch Vergleichung mit der ersten Gleichung (1) ergibt sich also

$$C_2 C_n = a_2.$$

Weiter ist im Sehnenviereck $C_1 C_2 C_3 C_n$

$$a_1 b_1 + b_1 \cdot C_3 C_n = a_2 b_2 = a_2 a_1 b_1 \text{ oder } a_1 + C_3 C_n = a_1 a_2,$$

d. h. durch Vergleichung mit der zweiten Gleichung (1)

$$C_3 C_n = a_3.$$

In dieser Art weiter fortfahrend (zunächst mit einem Viereck, welches $C_2 C_3 C_4 C_n$ heißen würde u. s. w.) findet man, wenn man jedesmal b_2 durch $a_1 b_1$ ersetzt, der Reihe nach

$$C_4 C_n = a_4, C_5 C_n = a_5 \text{ u. s. w.}$$

Die letzte Figur dieser Art würde $C_{n-3} C_{n-2} C_{n-1} C_n$ sein, aus welcher man

$$C_{n-1} C_n = a_{n-1}$$

(wofür auch b_1 gesetzt werden kann) ableitet. Die Hälften dieser Linien sind aber die $\cos$ der Peripheriewinkel $CC_n C_1$, $CC_n C_2$, u. s. w. dem absoluten Werte und auch dem Vorzeichen nach. Bezeichnet man also einen jeden der von C aus gerechneten Bogen CC_λ mit $\lambda \cdot \frac{2\pi}{2n}$ und beachtet, daß man als Maß eines Peripherie-

winkels die Hälfte des Bogens zu benutzen pflegt, so hat man (bis $C_n - 1$)

$$\cos \left(\lambda \cdot \frac{\pi}{2n} \right) = \frac{1}{2} a_\lambda.$$

Die halbe den $\cos$ eines rechten Winkels CC_nK (oder $\frac{\pi}{2}$) ausdrückende Linie ist Null; eben denselben Wert hat $\frac{1}{2} a_n$, wie aus der Gleichung

$$a_n - 2 + a_n = a_1 \cdot a_{n-1},$$

in welcher $a_n - 2 (C_n - 2 C_n) = b_2 = a_1 b_1$ und $a_1 a_{n-1} = a_1 b_1$ ist, folgt. Weiter braucht man die Figur nicht zu verfolgen. Denn erstens steht schon fest, dass sich die eben besprochenen Werte der $\frac{1}{2} a$ nach der Regel

$$\frac{1}{2} a_{n+\lambda} = - \frac{1}{2} a_{n-\lambda}$$

wiederholen, und zweitens ist man übereingekommen, die $\cos$ der folgenden Winkel ($> \frac{\pi}{2}$) durch die halben Sehnen $\frac{1}{2} C_n C_{n+1}$, $\frac{1}{2} C_n C_{n+2}$ u. s. w. (welche an Gröfse den halben Sehnen $\frac{1}{2} C_n C_{n-1}$, $\frac{1}{2} C_n C_{n-2}$ u. s. w. gleich sind), aber mit umgekehrten Vorzeichen auszudrücken. Die Gleichung

$$(15) \quad \cos \left(\lambda \cdot \frac{\pi}{2n} \right) = \frac{1}{2} a_\lambda$$

gilt also zunächst auch zwischen $\frac{\pi}{2}$ und π . Aber auch über π hinaus bis $\frac{3\pi}{2}$, wo ebenfalls negatives Vorzeichen, dann von $\frac{3\pi}{2}$ bis 2π , wo wieder positives Vorzeichen u. s. w. auftritt, behält sie Gültigkeit.

Was die absoluten Werte der $\sin$ betrifft, so stimmen dieselben wegen der Gleichungen

$$\sin^2 + \cos^2 = 1 \quad \text{und} \quad \left(\frac{1}{2} b \right)^2 + \left(\frac{1}{2} a \right)^2 = 1$$

mit denen der Gröſſen $\frac{1}{2}b$ überein. Aber auch die Vorzeichen sind fortwährend bei beiden dieselben, da die sin gerechnet werden

positiv für Winkel zwischen 0 und π ,
negativ für Winkel zwischen π und 2π

u. s. w. Man hat also allgemein

$$\sin \left(\lambda \cdot \frac{\pi}{2n} \right) = \frac{1}{2} b_{\lambda}.$$

Hiermit sind nun zwar nicht die cos und sin jedes beliebig gewählten Winkels dargestellt. Beachtet man aber, dass jeder Winkel (oder halbe Bogen) zwischen zwei bestimmten $\lambda \cdot \frac{\pi}{2n}$ und $(\lambda + 1) \cdot \frac{\pi}{2n}$, welche durch Vergrößerung der Zahl n einander immer näher kommen, enthalten ist, und dafs andererseits cos und sin desfelben Winkels zwischen den beliebig wenig verschiedenen Zahlen $\frac{1}{2}a_{\lambda}, \frac{1}{2}a_{\lambda+1}$ — man beachte die Figur — und $\frac{1}{2}b_{\lambda}, \frac{1}{2}b_{\lambda+1}$ eingeschlossen sind, so darf man in allen Fällen mit unbegrenzter Annäherung die Formeln (5) auf die cos und sin aller Winkel anwenden. Sie lauten, wenn man jede mit 4 dividiert und $\frac{1}{2}a$ durch cos, $\frac{1}{2}b$ durch sin ersetzt und die Peripheriewinkel selbst (oder halben Bogen) mit x und y bezeichnet,

$$\cos(x \pm y) = \cos x \cdot \cos y \mp \sin x \cdot \sin y$$

$$\sin(x \pm y) = \sin x \cdot \cos y \pm \cos x \cdot \sin y.$$

Anmerkung. Nimmt man 2^{n-1} statt n , so sind in der Figur 2^n Sehnen, jede gleich b_1 , vorhanden. Der Umring des regelmässigen 2^n Ecks ist also $2^n \cdot b_1$. Mittels der am Schlusse von No. 7 bestimmten Grenzen von b_1^2 lässt sich $2^{2n} \cdot b_1^2$ zwischen folgende Zahlenwerte einschließen:

$$2^{2n} \cdot b_1^2 < \frac{4}{3} \cdot \frac{2^{2n}}{2^{2n-5}} - \dots - \text{d. i.} < \frac{4}{3} \cdot 2^5 \text{ oder } \frac{128}{3}$$

$$2^{2n} \cdot b_1^2 > \frac{7}{6} \cdot \frac{2^{2n}}{2^{2n-5}} - \dots - \text{d. i.} > \frac{7}{6} \cdot 2^5 \text{ oder } \frac{112}{3};$$

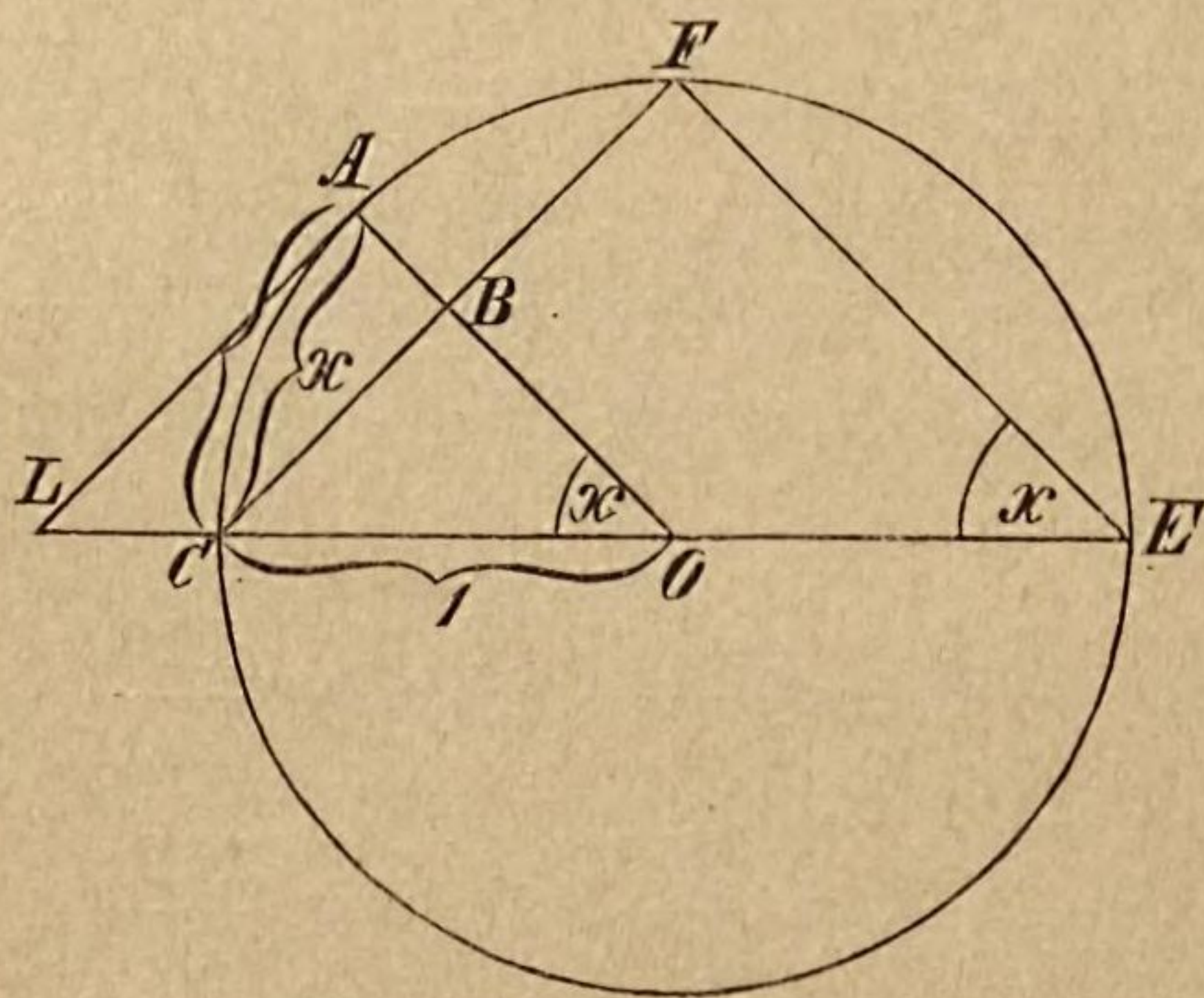
$$\sqrt{\frac{128}{3}} > 2\pi > \sqrt{\frac{112}{3}}, \text{ d. h. } \pi \text{ liegt zwischen } 3,26 \text{ und } 3,05.$$

10. Im Interesse späterer Entwicklungen sollen hier noch einige Bemerkungen über die Funktionen $\cos$ und $\sin$ angefügt werden. Statt der Peripheriewinkel, von denen dieselben abhängig gemacht wurden, kann man dieselben eben so gut auf Centriwinkel (und dies geschieht in der That häufiger) und Flächen von Kreissektoren beziehen.

Bezeichnet man einen beliebigen Peripheriewinkel mit x , so hat man den halben zugehörigen Bogen, wenn man die gangbare Betrachtungsweise annimmt, ebenfalls mit x zu bezeichnen. Ebenso wird dann der zu dem halben Bogen gehörige Centriwinkel benannt. Ist dieser Centriwinkel in Graden, Minuten und Sekunden gegeben (etwa α), so findet man die Länge des Bogens x (gemessen mit dem Radius) durch die Gleichungen

$$\frac{360^{\circ}}{\alpha} = \frac{2\pi}{x}, \quad x = 2\pi \cdot \frac{\alpha}{360^{\circ}}.$$

Im Folgenden wird übrigens von der Winkelbezeichnung α nicht die Rede sein, sondern immer mit x (dem zum Centriwinkel gehörigen Bogen) operiert werden.



Will man α selbst anwenden,
so hat man dies erst mittelst

$$\alpha = 360^\circ \cdot \frac{x}{2\pi}$$

zu berechnen.

In der Figur — der Radius des Kreises soll 1 sein — ist

$$\cos x = \frac{1}{2} EF = OB, \sin x = CB.$$

Die Fläche des Sektors COA,

welche mit s bezeichnet werden möge, ist gleich $\frac{1}{2} x = s$, also $x = 2s$. Man kann sich also auch so ausdrücken:

der $\cos$ des doppelten Sektors ist gleich $\frac{1}{2} a$, wo a die Sehne EF bedeutet, der $\sin$ des doppelten Sektors ist gleich $\frac{1}{2} b$, wo b die Sehne CF bedeutet.

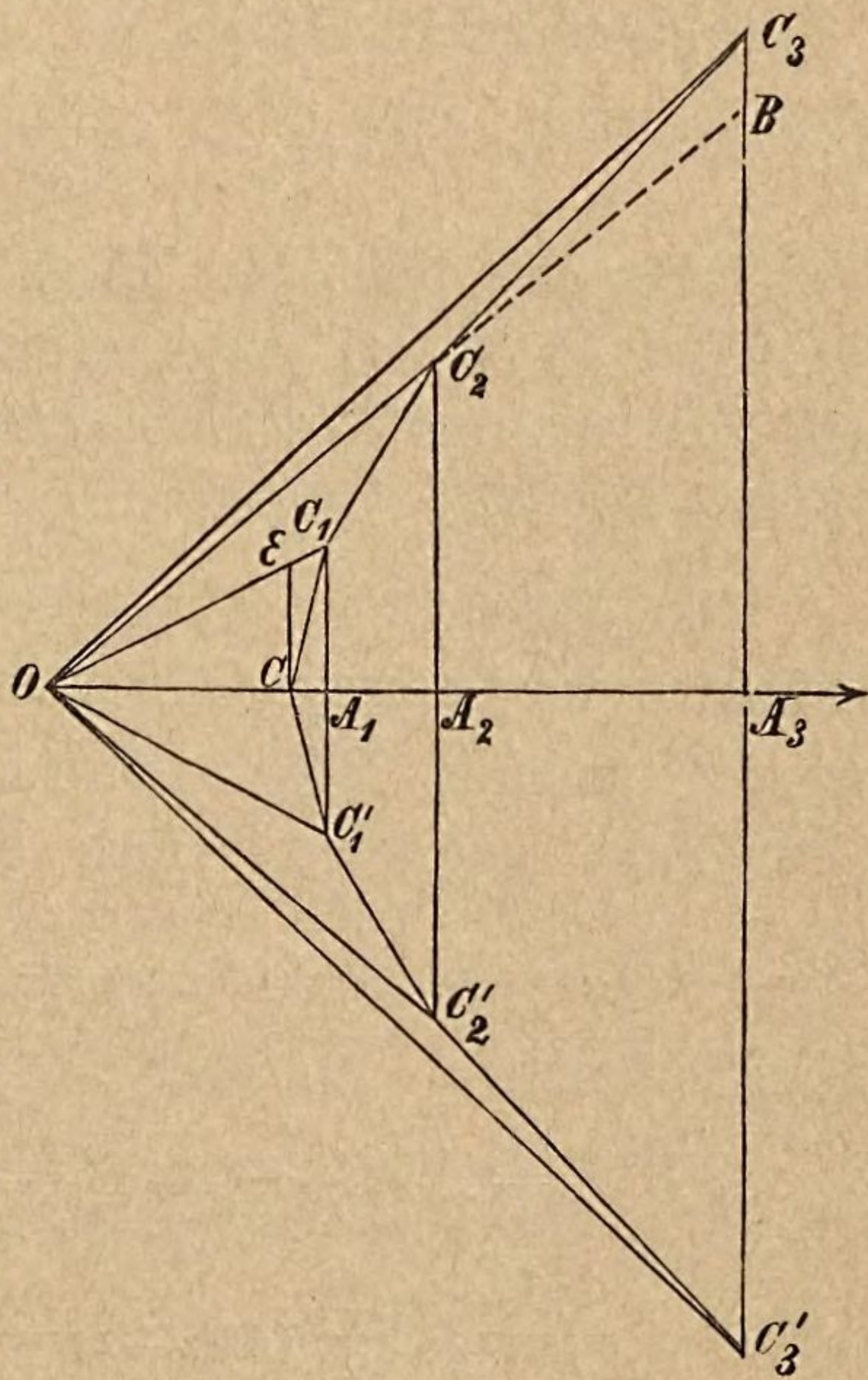
Größen, von deren (veränderlichem) Werte andere Größen abhängig gedacht werden, pflegt man Argumente zu nennen. So kann man hier als Argumente der Funktionen $\cos$ und $\sin$ eben so gut den Bogen (x) als die doppelte Fläche des Sektors ($2s$) und, wenn man dies vorzieht, die mit α bezeichnete Winkelgröße benutzen. Letzteres wird aber weiterhin nicht geschehen.

11. Was die in No. 4 behandelten Größen α und γ ($= \frac{1}{i} \beta$) betrifft, so verfahren wir folgendermaßen.

Auf einer geraden Linie werden von O aus die Strecken $OC = 1 = \frac{1}{2} \alpha_0$, $OA_1 = \frac{1}{2} \alpha_1$, $OA_2 = \frac{1}{2} \alpha_2$ u. s. w. abgetragen, ferner in A_1 nach beiden Seiten die Senkrechten $A_1 C_1 = A_1 C'_1 = \frac{1}{2} \gamma_1$, $A_2 C_2 = A_2 C'_2 = \frac{1}{2} \gamma_2$ u. s. w. errichtet. Da $\gamma_{-z} = -\gamma_z$ sein sollte, so steht nichts im Wege, die Linien

$A_x C_x = \frac{1}{2} \gamma_z$, $A_x C'_x = \frac{1}{2} \gamma_{-z}$ zu bezeichnen. Zwischen den Linien $\frac{1}{2} \alpha$ und $\frac{1}{2} \gamma$ findet nach No. 4 die Beziehung statt

$$\left(\frac{1}{2} \alpha_z\right)^2 - \left(\frac{1}{2} \gamma_z\right)^2 = \left(\frac{1}{2} \alpha_x\right)^2 - \left(\frac{1}{2} \gamma_{-x}\right)^2 = 1.$$



Die Werte von $\frac{1}{2} \alpha$ und $\frac{1}{2} \gamma$ steigen fortwährend, jedoch so, daß $\frac{1}{2} \gamma$ (absolut genommen) immer kleiner als $\frac{1}{2} \alpha$ bleibt, weil $\left(\frac{1}{2} \alpha\right)^2 - \left(\frac{1}{2} \gamma\right)^2 = 1$ ist.

Aus der letzten Gleichung in No. 4 ergibt sich, wenn man $\lambda = x - 1$ setzt,

$$\gamma_{x-(x-1)} \text{ d. i. } \gamma_1 = \frac{1}{2} \gamma_x \cdot \alpha_{x-1} - \frac{1}{2} \alpha_x \cdot \gamma_{x-1};$$

da γ_1 positiv ist, so hat man also stets

$$\gamma_x \cdot \alpha_{x-1} > \alpha_x \cdot \gamma_{x-1}, \text{ oder } \gamma_x > \frac{\alpha_x}{\alpha_{x-1}} \cdot \gamma_{x-1}.$$

Verlängert man nun irgend eine der Linien OC_{x-1} (z. B. OC_2), bis sie die nächste Senkrechte $A_x C_x = \frac{1}{2} \gamma_x$ in B trifft, so ist

$$\frac{A_x B}{A_{x-1} C_{x-1}} = \frac{OA_x}{OA_{x-1}} \text{ oder } A_x B = \frac{1}{2} \gamma_{x-1} \cdot \frac{\alpha_x}{\alpha_{x-1}}.$$

Hieraus folgt, daß $A_x B < \frac{1}{2} \gamma_x$ (weil dies $> \frac{\alpha_x}{\alpha_{x-1}} \cdot \frac{1}{2} \gamma_{x-1}$)

sein muß und die in der Figur auf einander folgenden Dreiecke OCC_1 , $OC_1 C_2$, $OC_2 C_3$ u. s. w. sich in der durch die Zeichnung gekennzeichneten Weise derartig an einander fügen, daß die Winkel $CC_1 C_2$, $C_1 C_2 C_3$ u. s. w. stets concav bleiben.

Die Fläche des Dreiecks $OC_{x-1} C_x$ erhält man als die Differenz der Dreiecke OBC_x und $C_{x-1} BC_x$, welche, da sie dieselbe Grundlinie BC_x besitzen, durch ein Dreieck mit dieser Grundlinie und einer Höhe gleich der Differenz der Höhen $OA_x - A_{x-1} A_x = OA_{x-1} = \frac{1}{2} \alpha_{x-1}$ ersetzt werden kann. Man hat nun

$$BC_x = A_x C_x - A_x B = \frac{1}{2} \gamma_x - \frac{1}{2} \gamma_{x-1} \frac{\alpha_x}{\alpha_{x-1}} = \frac{1}{\alpha_{x-1}} \left(\frac{1}{2} \gamma_x \alpha_{x-1} - \frac{1}{2} \alpha_x \gamma_{x-1} \right) = \frac{\gamma_1}{\alpha_{x-1}}.$$

Hiernach ist $\Delta OC_{x-1} C_x = \frac{1}{2} \cdot \frac{\gamma_1}{\alpha_{x-1}} \cdot \frac{1}{2} \alpha_{x-1} = \frac{1}{4} \gamma_1$. Die

Dreiecke

$$OCC_1, OC_1C_2, OC_2C_3 \text{ u. s. w.,}$$

deren Spitzen in O liegen und deren Grundlinien CC_1, C_1C_2, C_2C_3 u. s. w. sind, besitzen also denselben Flächeninhalt $\frac{1}{4} \gamma_1$.

Nimmt man $\frac{1}{2} \alpha_1$ immer näher an 1, wobei $\frac{1}{2} \gamma_1$ unausgesetzt abnimmt, so folgen gleichzeitig die Punkte C, C_1, C_2 u. s. w. immer dichter auf einander; man bezeichnet die Curve, welche, wenn die Punkte unendlich nahe an einander rückten, entstehen würde, als den einen Zweig einer gleichseitigen Hyperbel. Zu jedem willkürlich gewählten $\frac{1}{2} \alpha$ gehören zwei bestimmte $\frac{1}{2} \gamma$ (positiv und negativ) und damit zwei bestimmte Punkte der Hyperbel. Die Flächen der vorher betrachteten Dreiecke (Hyperbelsektoren von O aus) wachsen gleichmäfsig mit dem Steigen des Index. Zu irgend einer in der Reihe der Gröfsen $\frac{1}{2} \alpha$ gehört also eine bestimmte Fläche des (von OC aus gerechneten) Sektors, nämlich zu $\frac{1}{2} \alpha_\lambda$ der Sektor $\frac{1}{4} \gamma_1 \cdot \lambda$.

Für die Gröfsen $\frac{1}{2} \alpha$ und $\frac{1}{2} \gamma$ sind die Bezeichnungen cof und fin^* gebräuchlich; als Argument benutzt man (ähnlich wie beim Kreise am Schlusse der vorigen Nummer) die doppelte Fläche des Sektors und setzt demnach

$$\frac{1}{2} \alpha_\lambda = \text{cof} \left(\frac{1}{2} \gamma_1 \cdot \lambda \right), \quad \frac{1}{2} \gamma_\lambda = \text{fin} \left(\frac{1}{2} \gamma_1 \cdot \lambda \right),$$

oder, wenn man die Fläche $\frac{1}{2} \gamma_1 \cdot \lambda$ mit x bezeichnet,

$$\frac{1}{2} \alpha = \text{cof } x, \quad \frac{1}{2} \gamma = \text{fin } x,$$

wobei selbstverständlich dasjenige $\frac{1}{2} \alpha$ und dasjenige $\frac{1}{2} \gamma$ zu nehmen sind, welche zu der gerade gewählten Fläche x gehören.

* Man nennt cof und fin hyperbolische Funktionen.

Eine zweite, später mehrfach zu benutzende Bezeichnungsweise ist

$$\frac{1}{2} \alpha = \cos (i x), \frac{1}{2} i \gamma = \sin (i x),$$

wobei man aber $\cos$ und $\sin$ durchaus nicht in dem früher benutzten Sinne deuten darf, sondern eben nur an eine konventionelle Schreibweise zu denken hat. Da in No. 4 $i \gamma$ statt β gesetzt war, so kann man auch noch

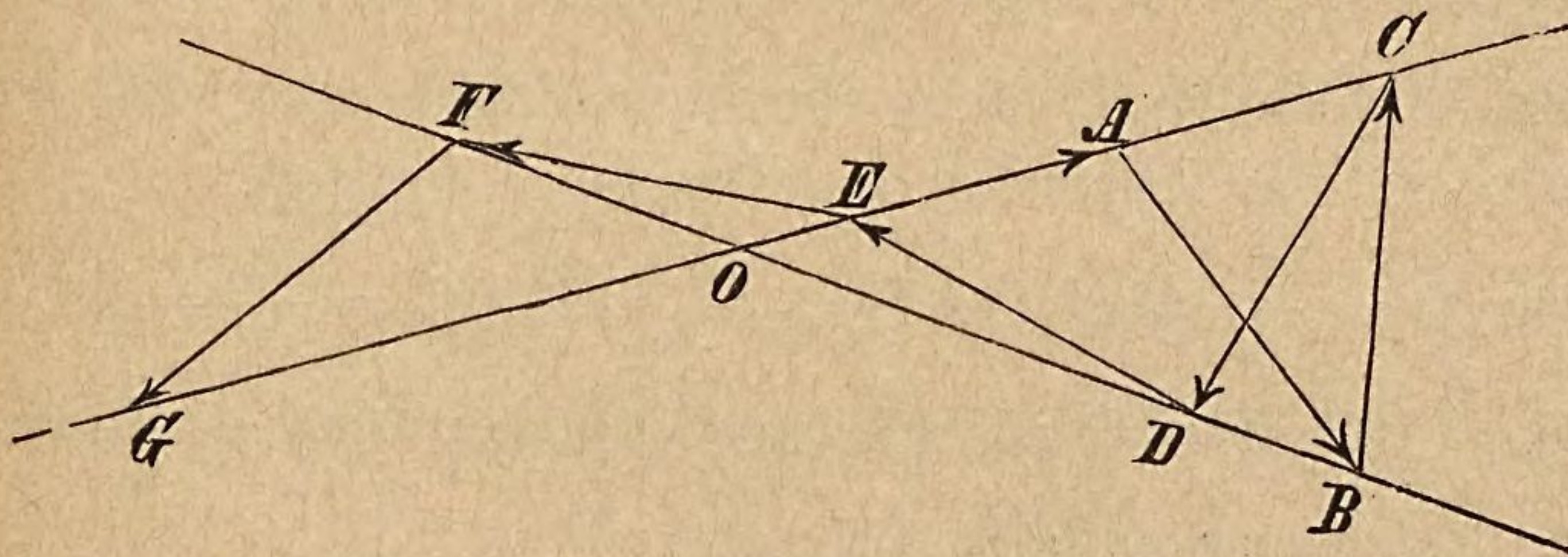
$$\frac{1}{2} \alpha = \cos (i x), \frac{1}{2} \beta = \sin (i x)$$

setzen. Keine der bisher für $\cos$ und $\sin$ ermittelten Beziehungen darf aber ohne Beweis auf die vorliegenden Gröfsen übertragen werden.

Zweiter Abschnitt.

Über regelmässige Vielecke.

12. Um Anwendung von den für reelle a und b (a_1 zwischen -2 und $+2$) erhaltenen Resultaten zu machen, soll zunächst eine die regelmässigen Vielecke im Allgemeinen betreffende Betrachtung angestellt werden, um dann zu einer Anzahl regelmässiger Vielecke im Speciellen überzugehen.



Schneidet man auf dem einen Schenkel eines Winkels O ein beliebiges Stück OA ab — es soll stets mit 1 bezeichnet werden —, beschreibt um A mit $AO = 1$ einen Bogen, welcher den anderen Schenkel aufser in O (im Allgemeinen) in noch einem Punkte B trifft, ebenso um B mit $BA = 1$ einen Bogen, welcher den ersten Schenkel noch in C schneidet u. s. w., so sind folgende Fälle möglich.

Ist der Winkel O ein rechter, so fällt B wieder auf O , C auf die Verlängerung von AO (über O hinaus), der folgende Punkt auf O , der nächste auf A u. s. w.

Für jeden anderen Winkel O entsteht jedenfalls ein nicht mit O zusammenfallender Punkt B , und zwar kann die Figur im Allgemeinen immer weiter fortgesetzt werden, ohne sich zu schliessen.

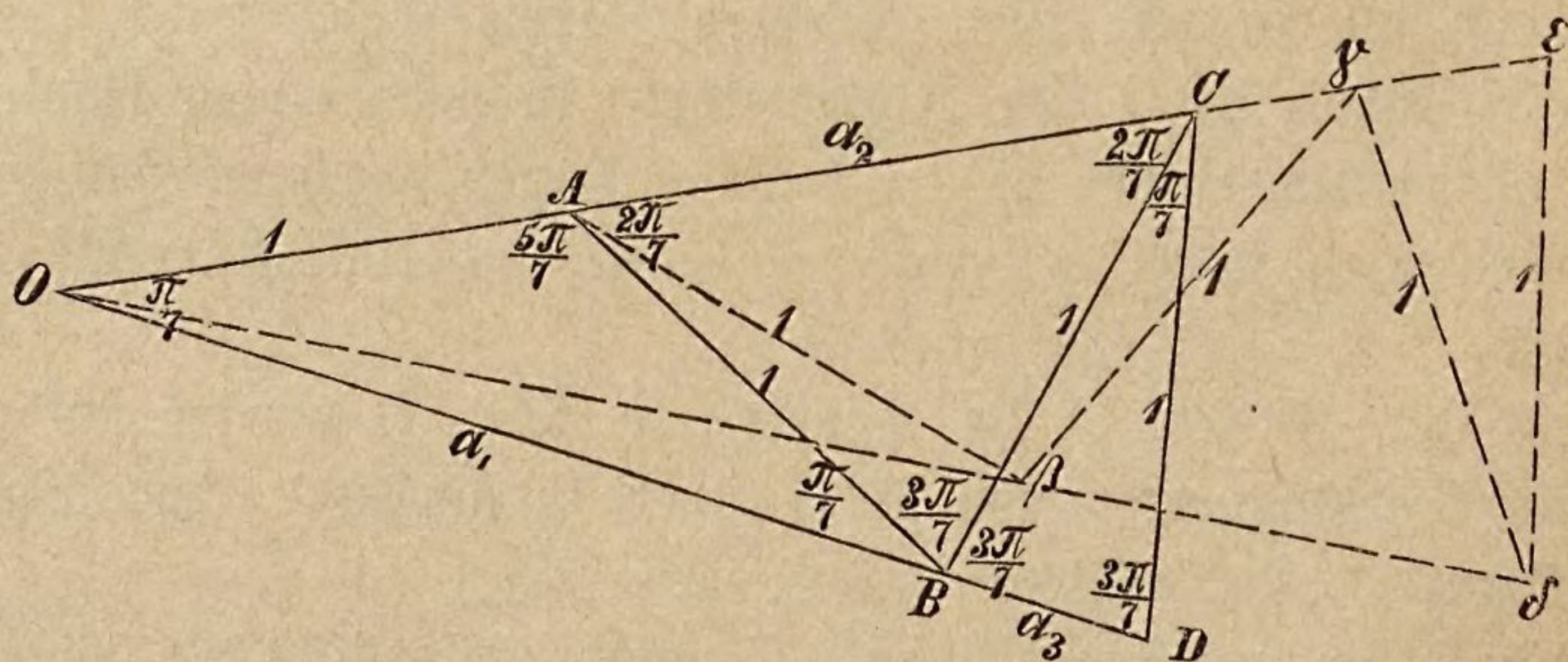
Es soll nun untersucht werden, welche Figuren entstehen, wenn man, unter der Bedingung, dass n eine ganze Zahl > 1 bedeutet, den Winkel $O = \frac{\pi}{n}$ nimmt. Dabei soll die Zeichnung in dem Augenblicke geschlossen werden, in welchem sich eine irgend einer der schon vorhandenen congruente Figur wiederholen würde. Der Fall $O = \frac{\pi}{2}$ ist schon erledigt.

Nimmt man $O = \frac{\pi}{3}$, so kann man die Zeichnung mit einem gleichseitigen Dreieck OAB beenden, für $O = \frac{\pi}{4}$ mit einem bei A rechtwinkligen gleichschenkligen Dreiecke.

Wird $O = \frac{\pi}{5}$ gewählt, so hat man $OAB = \frac{3\pi}{5}$, den Nebenwinkel gleich $\frac{2\pi}{5}$ ($< \frac{\pi}{2}$); es entsteht dann noch das Dreieck BAC , in welchem $C = \frac{2\pi}{5}$, $ABC = \frac{\pi}{5}$ wird. Da das folgende Dreieck BCD dem eben genannten congruent werden würde, so ist die Zeichnung im Punkte C beendigt.

Für $O = \frac{\pi}{6}$ wird $OAB = \frac{2\pi}{3}$, $BAC = \frac{\pi}{3} = BCA$, das Dreieck ABC also gleichseitig und Winkel $OBC = \frac{\pi}{2}$, wo man mit der Zeichnung aufhört. U. s. w.

Wir beschränken uns auf den Fall, dass n eine ungerade Zahl ist und bezeichnen dieselbe mit $2k + 1$.



Für $n = 7$ entsteht die vorstehende Figur. Denkt man die Linie $OA \dots$ fest, $OB \dots$ drehbar, so sieht man, wie bei einer Drehung der letzteren Linie nach OA hin AB in die Lage $A\beta$,

BC in die Lage $\beta\gamma$, CD in die Lage $\gamma\delta$ gelangt. Ist dann der Winkel $CO\delta$ gleich $\frac{\pi}{9}$ geworden, so erkennt man, daß der Winkel $OCD = \frac{3\pi}{7}$ in $O\gamma\delta = \frac{5\pi}{9}$ übergegangen ist und an die Figur noch das gleichschenklige Dreieck $\gamma\delta\varepsilon$ mit den Winkeln $\gamma = \frac{4\pi}{9}$, $\varepsilon = \frac{4\pi}{9}$, $\delta = \frac{\pi}{9}$ angeschlossen werden kann. Ganz ähnlich vollzieht sich der Uebergang von $O = \frac{\pi}{9}$ in $O = \frac{\pi}{11}$ u. s. w.

Es sollen jetzt für die Linien OB, AC, BD, resp. $O\beta$, $A\gamma$, $\beta\delta$, $\gamma\varepsilon$ u. s. w. folgende Bezeichnungen eingeführt werden. In jedem gleichschenkligen Dreiecke, dessen Schenkel gleich 1 und Basiswinkel $\frac{m \cdot \pi}{n} = \frac{m \cdot \pi}{2k+1}$ (kleiner als $\frac{\pi}{2}$) sind, werde die Basis a_m genannt. In der Figur für $O = \frac{\pi}{7}$ hat man also die drei Linien

$$OB = a_1, AC = a_2, BD = a_3,$$

für $O = \frac{\pi}{9}$ die vier Linien

$$O\beta = a_1, A\gamma = a_2, \beta\delta = a_3, \gamma\varepsilon = a_4$$

und allgemein für $O = \frac{\pi}{2k+1}$ die k Linien

$$a_1, a_2, a_3, \dots, a_k.$$

Die eben genannten k ($= \frac{n-1}{2}$) Linien sind ersichtlich die doppelten cos der Winkel $\frac{\pi}{n}, 2 \cdot \frac{\pi}{n}, \dots, k \cdot \frac{\pi}{n}$, fallen also, als Zahlen betrachtet, mit den als a bezeichneten Größen a_ν , $a_{2\nu}$, $a_{3\nu}$ u. s. w. zusammen, wo ν so gewählt werden muß, daß $\frac{\pi}{n}$ beliebig nahe dem Werte $\nu \cdot \frac{2\pi}{2^m+1}$ * gleich wird. Wenden wir die Formeln (7) in No. 2 hier nur auf solche Indices an, welche den gemeinschaftlichen Faktor ν besitzen, so steht nichts im Wege (wenn es, ohne Verwechselungen zu veranlassen, möglich

* Es ist m statt der früher gebrauchten Zahl n geschrieben; man hat also m hinlänglich groß zu denken. Uebrigens ist auch unmittelbar jedes a ein doppelter cos, weil in der Reihe derselben sicher der Werth Null ($\cos \pi$) auftreten würde.

ist), überall a_1 statt a_v , a_2 statt a_{2v} , u. s. w. a_k statt a_{kv} geschrieben zu denken. Die Gleichungen (7) lauten dann

$$a_{\kappa \pm \lambda} = \frac{1}{2} a_{\kappa} \cdot a_{\lambda} \mp \frac{1}{2} b_{\kappa} \cdot b_{\lambda}$$

$$b_{\kappa \pm \lambda} = \frac{1}{2} b_{\kappa} \cdot a_{\lambda} \pm \frac{1}{2} a_{\kappa} \cdot b_{\lambda};$$

nur müßte man jedesmal, wenn man Veranlassung hätte, auf die früheren Beziehungen zu $a_1 = 2 \cdot \cos \frac{\pi}{2^m}$ zurückzugehen (was hier nicht der Fall sein wird), $v\kappa$ statt κ und $v\lambda$ statt λ nehmen.

Die jetzt zu betrachtenden Größen

$$a_1, a_2, \dots, a_k$$

sind sämtlich positiv, weil $k \cdot \frac{\pi}{n} = \frac{k \cdot \pi}{2k+1} < \frac{\pi}{2}$. Die letzte von ihnen, a_k , liegt jedesmal (man vergl. die letzte Figur) einem Winkel $\frac{\pi}{n}$ gegenüber, und zwar in einem gleichschenkligen Dreiecke, dessen diesen Winkel einschließenden Schenkel gleich 1 sind. Sie stellt demnach die Seite des regelmäßigen $2n$ Ecks im Kreise mit dem Radius 1 dar. (Der Zusammenhang der übrigen a mit (ev.) den Seiten von regelmäßigen Sternvielecken soll hier übergangen werden.)

Es sollen nun die kleinsten Werte, welche n besitzen kann (bis 17) der Reihe nach betrachtet werden.

I. Das regelmäßige Sechseck; $n = 3$, $k = 1$.

Es ist nur ein einziges a vorhanden, nämlich $a_1 = 1$, wenn Winkel $O = \frac{\pi}{3}$.

II. Das regelmäßige Zehneck, $n = 5$, $k = 2$.

Es sind zwei a vorhanden, a_1 und a_2 . Aus der ersten Figur in No. 9, die freilich diesen Fall nicht genau darstellt, erkennt man, daß $OB = a_1$, $AC = a_2$ und

$$a_1 = 1 + a_2 \text{ oder } a_1 + (-a_2) = 1$$

sein muß. Da $\triangle OAC \simeq \triangle BAC$ (eine ähnliche Beziehung wird bei allen folgenden Figuren auftreten), so ist $\frac{a_2}{1} = \frac{1}{a_1}$, oder

$$a_1 \cdot (-a_2) = -1.$$

Hiernach sind a_1 und $-a_2$ resp. die positive und negative Wurzel der quadratischen Gleichung

$$x^2 - x - 1 = 0, \quad x_1 = +\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{5}, \quad x_2 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{5},$$

d. h.

$$a_1 = x_1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{5}, \quad a_2 = -x_2 = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{5}.$$

III. Das regelmäßige Vierzehneck (letzte Figur); $n = 7$, $k = 3$.

Man erhält die Gleichungen

$$1 + a_2 = a_1 + a_3$$

und, weil $\Delta OCD \sim BCD$, also $\frac{BD}{CD} = \frac{CD}{OD} = \frac{CD}{OC}$ ist,

$$a_3(1 + a_2) = a_3(a_1 + a_3) = 1.$$

Bildet man das Produkt

$$(x - a_1)(x + a_2)(x - a_3) = x^3 - (a_1 - a_2 + a_3)x^2 - (a_1 a_2 - a_1 a_3 + a_2 a_3)x + a_1 a_2 a_3,$$

in welchem

$$a_1 - a_2 + a_3 = 1$$

$$a_1 a_2 - a_1 a_3 + a_2 a_3 = a_1 + a_3 - a_2 - a_1 + a_1 + a_3$$

$$= a_1 + a_3 - a_2 + a_3 + a_1 - a_2 = 2^*$$

$$a_1 a_2 a_3 = a_3 \cdot a_1 a_2 = a_3(a_1 + a_3) = 1,$$

so sind a_1 , $-a_2$ und a_3 die Wurzeln der kubischen Gleichung

$$x^3 - x^2 - 2x + 1 = 0,$$

und zwar ist die kleinere der beiden positiven Wurzeln (a_3) die Seite des regelmäßigen Vierzehnecks.

IV. Das regelmäßige Achtzehneck (letzte Figur, punktiert); $n = 9$, $k = 4$.

Zunächst bestehen die Gleichungen

$$1 + a_2 + a_4 = a_1 + a_3,$$

$$a_4(1 + a_2 + a_4) = a_4(a_1 + a_3) = 1 \text{ (Ähnlichkeit u. s. w.)}.$$

* Da $a_m = 2 \cdot \cos\left(m \cdot \frac{\pi}{n}\right)$, so ist stets $a_{n-m} = 2 \cdot \cos\left((n-m) \frac{\pi}{n}\right) = -2 \cos\left(m \frac{\pi}{n}\right) = -a_m$; hier also ($n=7$) $a_4 = -a_3$, $a_5 = -a_2$. Diese

Beziehung wird auch weiterhin benutzt werden. Ferner ist wegen (7)

$$a_m \cdot a_n = a_{m-n} + a_{m+n}.$$

Da a_3 die Basis eines gleichschenkligen Dreiecks mit den Basiswinkeln $\frac{3\pi}{9} = \frac{\pi}{3}$ ist, so wird $a_3 = 1$ und man hat

$$a_2 + a_4 - a_1 = 0, \quad a_4 (1 + a_2 + a_4) = a_4 (1 + a_1) = 1.$$

Bildet man nun das Produkt

$$(x - a_2)(x - a_4)(x + a_1) = x^3 - (a_2 + a_4 - a_1)x^2 - (a_1 a_2 + a_1 a_4 - a_2 a_4)x + a_1 a_2 a_4,$$

in welchem

$$\begin{aligned} a_2 + a_4 - a_1 &= 0, \\ a_1 a_2 + a_1 a_4 - a_2 a_4 &= a_1 + a_3 + a_3 + a_5 - a_2 - a_6 \\ &= a_1 + 1 + 1 - a_4 - a_2 + 1 = 3 \\ a_1 a_2 a_4 &= (a_1 + a_3) a_4 = 1, \end{aligned}$$

so sind $-a_1, a_2, a_4$ die Wurzeln der kubischen Gleichung

$$x^3 - 3x + 1 = 0,$$

und zwar ist die kleinere der beiden positiven Wurzeln (a_4) die Seite des 18-Ecks.

V. Das Zweiundzwanzigeck; $n = 11, k = 5$.

Hier mag ohne weitere Ausführung blofs angegeben werden, dafs das Produkt

$$(x - a_1)(x + a_2)(x - a_3)(x + a_4)(x - a_5)$$

auf die Gleichung fünften Grades

$$x^5 - x^4 - 4x^3 + 3x^2 + x - 1 = 0$$

führt. Die kleinste positive Wurzel ist die Seite des 22-Ecks.

VI. Das Sechszwanzigeck; $n = 13, k = 6$.

Die Gleichung $1 + a_2 + a_4 + a_6 = a_1 + a_3 + a_5$ werde in folgender Gestalt geschrieben:

$$(a_1 + a_3 - a_4) - (a_2 + a_6 - a_5) = 1,$$

in welcher beide Klammern positiv, die erste also gröfser als die zweite ist. Bildet man das Produkt

$$\begin{aligned} & (a_1 + a_3 - a_4) \cdot -(a_2 + a_6 - a_5) \\ &= -a_1 a_2 - a_2 a_3 + a_2 a_4 - a_1 a_5 - a_3 a_6 + a_4 a_6 + a_1 a_5 + a_3 a_5 - a_4 a_5 \\ &= -a_1 - a_3 - a_1 - a_5 + a_2 + a_6 - a_5 - a_7 - a_3 - a_9 + a_2 + a_{10} + a_4 + a_6 \\ & \quad + a_2 + a_8 - a_1 - a_9 \\ &= -a_1 - a_3 - a_1 - a_5 + a_2 + a_6 - a_5 + a_6 - a_3 + a_4 + a_2 - a_3 + a_4 + a_6 + \\ & \quad a_2 - a_5 - a_1 + a_4 \\ &= -3(a_1 + a_3 + a_5 - a_2 - a_4 - a_6) = -3, \end{aligned}$$

so liefert die Gleichung

$$x^2 - x - 3 = 0$$

die beiden Wurzeln $x_1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{13}$, $x_2 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \sqrt{13}$ und es ist

$$a_1 + a_3 - a_4 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{13}, \quad a_2 + a_6 - a_5 = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{13}.$$

Bildet man jetzt das Produkt

$$(y - a_2)(y + a_5)(y - a_6) = y^3 - (a_2 + a_6 - a_5)y^2 - (a_2 a_5 - a_2 a_6 + a_5 a_6)y + a_2 a_5 a_6,$$

in welchem

$$a_2 + a_6 - a_5 = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{13},$$

$$\begin{aligned} a_2 a_5 - a_2 a_6 + a_5 a_6 &= a_3 + a_7 - a_4 - a_8 + a_1 + a_{11} \\ &= a_3 - a_6 - a_4 + a_5 + a_1 - a_2 = 1, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a_2 a_5 a_6 &= a_2 (a_1 + a_{11}) = a_2 (a_1 - a_2) = a_1 a_2 - a_2^2 \\ &= a_1 + a_3 - a_0 - a_4 = -\frac{3}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{13}, \end{aligned}$$

so ist die kleinste positive Wurzel (a_6) der kubischen Gleichung

$$y^3 - \left(-\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{13}\right) y^2 - y + \left(-\frac{3}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{13}\right) = 0$$

die Seite des 26-Ecks.

VII. Das Dreifsigeck; $n = 15$, $k = 7$. In der Gleichung

$$a_1 + a_3 + a_5 + a_7 = 1 + a_2 + a_4 + a_6$$

ist a_3 die Basis eines gleichschenkligen Dreiecks, dessen Basis-

Winkel $\frac{3\pi}{15} = \frac{\pi}{5}$ sind, d. h. $a_3 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{5}$ [nämlich die in

II. (10 Eck) mit a_1 bezeichnete Linie]; ferner a_5 die Basis eines

gleichschenkligen Dreiecks mit den Basiswinkeln $\frac{5\pi}{15} = \frac{\pi}{3}$, d. h.

$a_5 = 1$, und a_6 die Basis eines gleichschenkligen Dreiecks mit

den Basiswinkeln $\frac{6\pi}{15} = \frac{2\pi}{5}$, d. h. $a_6 = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{5}$ (m.s. II.)

Man erhält demnach

$$a_1 + a_7 - a_2 - a_4 = -1 \text{ oder } (a_2 - a_7) - (a_1 - a_4) = 1,$$

wo beide Klammern positiv sind. Weiter wird das Produkt

$$\begin{aligned}
(a_2 - a_7) \cdot - (a_1 - a_4) &= -a_1 a_2 + a_1 a_7 + a_2 a_4 - a_4 a_7 \\
&= -a_1 - a_3 + a_6 - a_7 + a_2 + a_6 - a_3 + a_4 \\
&= -a_1 - a_7 + a_2 + a_4 - 2a_3 + 2a_6 \\
&= -1;
\end{aligned}$$

man findet also aus der Gleichung

$$x^2 - x - 1 = 0$$

die beiden Wurzeln $x_1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{5}$, $x_2 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \sqrt{5}$ und deshalb

$$a_2 - a_7 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{5}, \quad a_1 - a_4 = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{5}.$$

Weiter hat man

$$a_2 \cdot - a_7 = -a_5 + a_6 = -\frac{3}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{5};$$

aus der quadratischen Gleichung

$$y^2 - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{5} \right) y - \frac{3}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{5} = 0,$$

deren Wurzeln

$$\begin{aligned}
y_1 &= \frac{1}{4} + \frac{1}{4} \sqrt{5} + \frac{1}{4} \sqrt{30 - 6\sqrt{5}}, \\
y_2 &= \frac{1}{4} + \frac{1}{4} \sqrt{5} - \frac{1}{4} \sqrt{30 - 6\sqrt{5}}
\end{aligned}$$

sind, erhält man also schliesslich

$$a_7 (= -y_2) = -\frac{1}{4} - \frac{1}{4} \sqrt{5} + \frac{1}{4} \sqrt{30 - 6\sqrt{5}},$$

die Seite des 30-Ecks.

VIII. Das Vierunddreifsigneck; $n = 17$, $k = 8$. Die Gleichung

$$1 + a_2 + a_4 + a_6 + a_8 = a_1 + a_3 + a_5 + a_7$$

bringen wir auf die Form

$$(16) \quad (a_3 + a_5 + a_7 - a_6) - (a_2 + a_8 + a_4 - a_1) = 1,$$

wo die erste Klammer sicher positiv ist. Jetzt entwickeln wir das Produkt

$$(17) \left\{ \begin{aligned}
&(a_3 + a_5 + a_7 - a_6) \cdot - (a_2 + a_8 + a_4 - a_1) = \\
&= -a_2 a_3 - a_2 a_5 - a_2 a_7 + a_2 a_6 - a_3 a_8 - a_5 a_8 - a_7 a_8 + a_6 a_8 \\
&- a_3 a_4 - a_4 a_5 - a_4 a_7 + a_4 a_6 + a_1 a_3 + a_1 a_5 + a_1 a_7 - a_1 a_6 \\
&= -4 \text{ (nach einigen Zwischenrechnungen).}
\end{aligned} \right.$$

Da die erste Klammer einen positiven Wert hatte, so muß die zweite $(a_2 + a_8 + a_4 - a_1)$ gleichfalls positiv und deshalb kleiner als die erste sein (wegen der zuerst angegebenen Gleichung). Aus der quadratischen Gleichung

$$x^2 - x - 4 = 0$$

ergibt sich dann, daß

$$a_3 + a_5 + a_7 - a_6 (= x_1) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{17},$$

$$a_2 + a_8 + a_4 - a_1 (= -x_2) = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{17}$$

sein muß. Zu der Gleichung

$$(a_2 + a_8) - (a_1 - a_4) (= -x_2) = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{17}$$

nehmen wir die folgende $[(a_2 + a_8)$ und $(a_1 - a_4)$ sind positiv]

$$\begin{aligned} (a_2 + a_8) \cdot -(a_1 - a_4) &= -a_1 a_2 - a_1 a_8 + a_2 a_4 + a_4 a_8 \\ &= -a_1 - a_3 - a_7 + a_8 + a_2 + a_6 + a_4 - a_5 = -1 \end{aligned}$$

und erhalten mittelst der quadratischen Gleichung

$$y^2 - (-x_2) \cdot y - 1 = 0 \quad (18)$$

die beiden Werte

$$y_1 = \frac{-x_2}{2} + \sqrt{\frac{x_2^2}{4} + 1}, \quad y_2 = \frac{-x_2}{2} - \sqrt{\frac{x_2^2}{4} + 1},$$

wobei

$$a_2 + a_8 (= y_1) = -\frac{1}{4} + \frac{1}{4} \sqrt{17} + \frac{1}{4} \sqrt{34 - 2\sqrt{17}}$$

$$a_1 - a_4 (= -y_2) = \frac{1}{4} - \frac{1}{4} \sqrt{17} + \frac{1}{4} \sqrt{34 - 2\sqrt{17}}$$

gefunden wird. Ähnlich behandeln wir

$$(a_3 + a_5) - (a_6 - a_7) (= x_1) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{17}$$

$$\begin{aligned} (a_3 + a_5) \cdot -(a_6 - a_7) &= -a_3 a_6 - a_5 a_6 + a_3 a_7 + a_5 a_7 \\ &= -a_3 + a_8 - a_1 + a_6 + a_4 - a_7 + a_2 - a_5 = -1 \end{aligned}$$

und bestimmen mittelst der Gleichung

$$z^2 - x_1 \cdot z - 1 = 0 \quad (19)$$

die beiden Werte

$$z_1 = \frac{x_1}{2} + \sqrt{\frac{x_1^2}{4} + 1}, \quad z_2 = \frac{x_1}{2} - \sqrt{\frac{x_1^2}{4} + 1},$$

aus denen

$$a_3 + a_5 = z_1 = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} \sqrt{17} + \frac{1}{4} \sqrt{34 + 2\sqrt{17}}$$

$$a_6 - a_7 = -z_2 = -\frac{1}{4} - \frac{1}{4} \sqrt{17} + \frac{1}{4} \sqrt{34 + 2\sqrt{17}}$$

erhalten wird. Weiter findet man

$$(20) a_2 \cdot a_8 = a_6 - a_7 = -z_2 = -\frac{1}{4} - \frac{1}{4} \sqrt{17} + \frac{1}{4} \sqrt{34 + 2\sqrt{17}},$$

und da

$$a_2 + a_8 \text{ schon} = y_1 = -\frac{1}{4} + \frac{1}{4} \sqrt{17} + \frac{1}{4} \sqrt{34 - 2\sqrt{17}}$$

bestimmt ist, so liefert die quadratische Gleichung

$$u^2 - y_1 \cdot u + (-z_2) = 0$$

schliesslich (als kleinere positive Wurzel) den Wert von

$$a_8 = u_2 = \frac{y_1}{2} - \sqrt{\frac{y_1^2}{4} - (-z_2)}$$

$$= -\frac{1}{8} + \frac{1}{8} \sqrt{17} + \frac{1}{8} \sqrt{34 - 2\sqrt{17}}$$

$$- \frac{1}{8} \sqrt{68 + 12\sqrt{17} + (-2 + 2\sqrt{17}) \sqrt{34 - 2\sqrt{17}} - 16 \sqrt{34 + 2\sqrt{17}}},$$

die Seite des 34-Ecks.

Mit Zirkel und Lineal zu konstruieren sind alle diejenigen von den genannten Vielecken, welche nur von Gleichungen zweiten Grades abhängen, also (das Sechseck), das Zehneck, das Dreissig-eck, das Vierunddreissigeck.* Von diesen Konstruktionen soll nur die letzte betrachtet werden. Um die Zahlen a zu benutzen, hat man jede derselben mit der Masseinheit, d. h. dem Radius des benutzten Kreises, r , multipliciert zu denken; hinterher ist es erlaubt wieder a statt $a \cdot r$ zu schreiben. Hiernach lautet die Gleichung (16)

$$(a_3 + a_5 + a_7 - a_6) - (a_2 + a_8 + a_4 - a_1) = r$$

und die Gleichung (17)

$$(a_3 + a_5 + a_7 - a_6) \cdot - (a_2 + a_8 + a_4 - a_1) = -4r^2.$$

* Durch Verdoppelung der Bogen erhält man das 3-Eck, 5-Eck, 15-Eck, 17-Eck.

Die Linien x_1 und $(-x_2)$, deren letztere $(-x_2)$ ist positiv) mit x' bezeichnet werden mag, sind dann auf bekannte Weise mittelst der Bedingungen, daß ihre Differenz $(x_1 - x')$ gleich r und die mittlere Proportionale zwischen ihnen $2r$ sein muß (wegen $x_1 \cdot x' = 4r^2$) herzustellen. Bezeichnet man weiter $(-y_2)$ mit y' , so hat man

$$\begin{aligned}(a_2 + a_8) - (a_1 - a_4) &= x' \\ (a_2 + a_8) \cdot (a_1 - a_4) &= r^2.\end{aligned}$$

Die Linien $a_2 + a_8 = y_1$, $a_1 - a_4 = y'$ sind also durch ihre Differenz x' und mittlere Proportionale r bestimmt. Ebenso setzen wir z' statt $-z_2$ und erhalten, da

$$\begin{aligned}(a_3 + a_5) - (a_6 - a_7) &= x_1 \\ (a_3 + a_5) \cdot (a_6 - a_7) &= r^2,\end{aligned}$$

die Linien $a_3 + a_5 = z_1$, $a_6 - a_7 = z'$ wieder durch die Bedingung, daß ihre Differenz x_1 und mittlere Proportionale r bekannt ist. Um schließlich (a_2) und a_8 zu bestimmen, benutzt man, weil $a_2 \cdot a_8 = (a_6 + a_{10})r = (a_6 - a_7)r$ ist, die Gleichungen

$$a_2 + a_8 = y_1, \quad a_2 \cdot a_8 = z'r,$$

wo a_8 die kleinere derjenigen beiden Linien ist, deren Summe y_1 und deren Rechteck $z' \cdot r$ ist.

Selbstverständlich ist bei der gegebenen Darstellung nur aus dem Erfolge zu ersehen, daß gerade die hier benutzte Gruppierung der a zu den erhaltenen Resultaten führt. Über die für solche Aufgaben im Allgemeinen zu benutzenden Prinzipien sehe man z. B. Serret, Handbuch der höheren Algebra 2. Bd.

Dritter Abschnitt.

**Darstellung der Gröfsen a_n und b_n durch a_1 und b_1 ,
für jeden Wert von a_1 .**

12. Zunächst sollen folgende die Entwicklungen abkürzende Bezeichnungen eingeführt werden. Für jede gerade (positive) Zahl $2n$ soll

$$(21)^* \quad (2n, 0) = 2 \text{ und } (2n, k) = 2n \cdot \frac{(n + k - 1) \dots (n - k + 1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots 2k}$$

sein, wo im zweiten Ausdruck k alle möglichen positiven ganzen Zahlen von 1 an bedeutet. Der Zähler in dem zuletzt angegebenen Bruche besteht aus $2k - 1$ Faktoren von $n + k - 1$ abwärts bis $n - k + 1$; für $k = 1$ hat man, da dann $n + 1 - 1 = n$ und $n - 1 + 1 = n$ ist, nur die eine Zahl n im Zähler. Auch mag noch bemerkt werden, dafs für $k > n$ der Wert von $(2n, k)$ Null wird, weil dann im Zähler sicher der Faktor $n - n - 1 + 1 = 0$ auftritt. Speziell soll

$$(21') \quad (0, 0) = 2, \quad (0, k) = 0 \text{ (für } k > 0 \text{)}$$

gesetzt werden.

Bedeutet weiter $2n + 1$ irgend eine ungerade (positive) Zahl > 1 , so werde

$$(22)^* \quad \begin{aligned} (2n + 1, 0) &= 1 \text{ [auch } (1, 0) = 1] \text{ und } (2n + 1, k) = \\ &= (n + k) \cdot \frac{(n + k - 1) \dots (n - k + 1)}{1 \cdot 2 \dots 2k} \end{aligned}$$

gesetzt, wo k alle positiven ganzen Zahlen von 1 an bedeutet und der Zähler des letzten Bruches Null wird für $k > n$; speciell sei

$$(22') \quad (1, 1) = 0, \quad (1, k) = 0 \text{ (für } k > 1 \text{)}.$$

* Bei der Benutzung dieser Definitionsgleichungen beachte man wohl, ob die erste Zahl in der Klammer links gerade (21) oder ungerade (22) ist.

Aus (22) folgt

$$(2n + 1, k - 1) = (n + k - 1) \cdot \frac{(n + k - 2) \dots (n - k)}{1 \cdot 2 \dots 2k - 2},$$

jedoch mit der Ausnahme $k = 1$, wo

$$(2n + 1, 1 - 1) = (2n + 1, 0) = 1$$

zu nehmen ist. Es soll jetzt erstens die Gleichung

$$4 \cdot (2n + 1, k) + (2n + 1, k - 1) - (2n, k) = (2n + 2, k) \quad (23)$$

bewiesen werden. Dieselbe gilt zunächst für $k = 1$, denn es ist

$$\begin{aligned} 4 \cdot (2n + 1, 1) + (2n + 1, 0) - (2n, 1) &= 4(n + 1) \cdot \frac{n}{1 \cdot 2} + 1 - 2n \cdot \frac{n}{1 \cdot 2} \\ &= n^2 + 2n + 1 = (2n + 2) \cdot \frac{n + 1}{1 \cdot 2} \\ &= (2n + 2, 1). \end{aligned}$$

Auch für $n = 0$ kann sie benutzt werden, weil

$$4 \cdot (1, 1) + (1, 0) - (0, 1) = 1 = (2, 1)$$

ist. Nimmt man jetzt $k > 1$, so hat man zunächst

$$\begin{aligned} 4 \cdot (2n + 1, k) - (2n, k) &= [4(n + k) - 2n] \cdot \frac{(n + k - 1) \dots (n - k + 1)}{1 \cdot 2 \dots 2k} \\ &= (2n + 4k) \cdot \frac{(n + k - 1) \dots (n - k + 1)}{1 \cdot 2 \dots 2k}, \quad (23') \end{aligned}$$

ferner

$$\begin{aligned} (2n + 1, k - 1) &= (n + k - 1) \cdot \frac{(n + k - 2) \dots (n - k + 2)}{1 \cdot 2 \dots 2k - 2} \\ &= (2k - 1) \cdot 2k \cdot \frac{(n + k - 1)(n + k - 2) \dots (n - k + 2)}{1 \cdot 2 \dots 2k - 2 \cdot 2k - 1 \cdot 2k}. \quad (23'') \end{aligned}$$

Schreibt man nun (23') in der Gestalt

$$(2n + 4k)(n - k + 1) \cdot \frac{(n + k - 1) \dots (n - k + 2)}{1 \cdot 2 \dots 2k}$$

und beachtet, daß

$$\begin{aligned} (2n + 4k) \cdot (n - k + 1) &= 2n(n + 1) + 4k(n + 1) - 2nk - 4k^2, \\ (2k - 1) \cdot 2k &= 4k^2 - 2k \end{aligned}$$

ist, wo sich die rechten Seiten zu

$$2n(n + 1) + 4k(n + 1) - 2k(n + 1) = (2n + 2)(n + k)$$

vereinigen, so liefert die Summe von (23') und (23'') den Ausdruck

$$(2n + 2) \cdot \frac{(n + k)(n + k - 1) \dots (n - k + 2)}{1 \cdot 2 \dots 2k},$$

der ersichtlich mit $(2n + 2, k)$ identisch ist.*

* Man überzeugt sich hiervon leicht, wenn man in (21) $n + 1$ statt n setzt.

Zweitens wollen wir darthun, dafs

$$(24) \quad (2n+2, k) - (2n+1, k) = (2n+3, k).$$

Zieht man nämlich von dem zuletzt angegebenen Bruche

$$(2n+2, k) = (2n+2) \cdot \frac{(n+k)(n+k-1)\dots(n-k+2)}{1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot 2k}$$

den Wert (22)

$$\begin{aligned} (2n+1, k) &= (n+k) \cdot \frac{(n+k-1)\dots(n-k+1)}{1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot 2k} = \\ &= (n-k+1) \cdot \frac{(n+k)(n+k-1)\dots(n-k+2)}{1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot 2k} \end{aligned}$$

ab, so besitzt die Differenz den Wert

$$\begin{aligned} &(n+1+k) \cdot \frac{(n+k)\dots(n-k+2)}{1 \cdot \dots \cdot 2k} = \\ &= (n+1+k) \cdot \frac{(n+1+k-1)\dots(n+1-k+1)}{1 \cdot \dots \cdot 2k}, \end{aligned}$$

während andererseits, wenn man in (22) $n+1$ statt n schreibt

$$(2n+3, k) = (n+1+k) \cdot \frac{(n+1+k-1)\dots(n+1-k+1)}{1 \cdot \dots \cdot 2k},$$

d. h. eben so groß gefunden wird. Die Gleichung (24) gilt auch noch für $k=0$ und lautet alsdann

$$(2n+2, 0) - (2n+1, 0) = 2 - 1 = 1 = (2n+3, 0);$$

hier darf auch $n=0$ genommen werden, da dann identisch

$$(2,0) - (1,0) = 2 - 1 = 1 = (3,0)$$

gefunden wird.

Drittens hat man

$$(25) \quad (2n+1, k) - (2n-1, k) = \frac{(n+k-1)\dots(n-k+1)}{1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot 2k-1},$$

wie sich aus

$$\begin{aligned} (2n+1, k) &= (n+k) \cdot \frac{(n+k-1)\dots(n-k+1)}{1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot 2k} \\ (2n-1, k) &= (n-1+k) \cdot \frac{(n-1+k-1)\dots(n-1-k+1)}{1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot 2k} \\ &= \frac{(n+k-1)(n+k-2)\dots(n-k+1)}{1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot 2k} \cdot (n-k) \end{aligned}$$

ergiebt. Denn führt man die Subtraktion aus (der Bruch

$$\frac{(n+k-1) \dots (n-k+1)}{1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot 2k}$$

ist beiden Ausdrücken gemeinschaftlich) und hebt dann mit $2k$, so entsteht ersichtlich die rechte Seite von (24).

Viertens bilde man für $k = 1$

$$\begin{aligned} (2n+2, 1) - (2n, 1) &= (2n+2) \cdot \frac{n+1}{1 \cdot 2} - 2n \cdot \frac{n}{1 \cdot 2} \\ &= n^2 + 2n + 1 - n^2 = 2n + 1. \end{aligned}$$

Nimmt man jetzt $k > 1$, so kann die Gleichung

$$(2n+2, k) - (2n, k) = (2n+1) \cdot \frac{(n+k-1) \dots (n-k+2)}{1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot 2k-1} \quad (26)$$

bewiesen werden. Dieselbe ergibt sich aus

$$\begin{aligned} (2n+2, k) &= (2n+2) \cdot \frac{(n+k)(n+k-1) \dots (n-k+2)}{1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot 2k} = \\ &= \frac{(2n+2)(n+k)}{2k} \cdot \frac{(n+k-1) \dots (n-k+2)}{1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot 2k-1} \\ (2n, k) &= 2n \cdot \frac{(n+k-1) \dots (n-k+2)(n-k+1)}{1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot 2k} = \\ &= \frac{2n(n-k+1)}{2k} \cdot \frac{(n+k-1) \dots (n-k+2)}{1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot 2k-1}, \end{aligned}$$

indem $(2n+2)(n+k) - 2n(n-k+1) = 2n \cdot n + 2n + 2nk + 2k - 2nn + 2nk - 2n = 2k(2n+1)$, also $\frac{(2n+2)(n+k)}{2k} - \frac{2n(n-k+1)}{2k} = (2n+1)$ gefunden wird. Dafs diese sonst all-

gemein gültige Entwicklung für $k = 1$ nicht benutzt werden darf, hat seinen Grund darin, dafs man aus $(2n+2, 1)$ und $(2n, 1)$ nicht das Produkt $(n+k-1) \dots (n-k+2)$, welches $n(n+1)$ sein würde, ausscheiden kann. In allen anderen Fällen ($k > 1$) ist dies aber möglich.

13. Wir behaupten nun, dafs für jeden geraden Index $(2n, \text{Null mit eingeschlossen})$

$$\begin{aligned} a_{2n} &= (2n, 0) - (2n, 1) b_1^2 + (2n, 2) b_1^4 - \dots \pm \\ &\quad \pm (2n, k) b_1^{2k} \mp \dots \end{aligned} \quad (27)$$

und für jeden ungeraden Index $(2n+1, 1 \text{ mit eingeschlossen})$

$$a_{2n+1} = (2n+1,0)a_1 - (2n+1,1)a_1 b_1^2 + \dots \pm (2n+1,k)a_1 b_1^{2k} \mp \dots \quad (28)$$

sein müsse. Die Reihen auf den rechten Seiten müssen bis zu der Stelle fortgesetzt werden, über welche hinaus der Coëfficient $(2n,k)$ resp. $(2n+1,k)$ Null wird, d. h. bis $k = n$, dürfen dann aber beliebig weit verlängert werden, da hierdurch nur Glieder vom Werte Null hinzutreten. Die Glieder sind abwechselnd positiv und negativ, und zwar positiv, wenn k eine gerade, negativ, wenn k eine ungerade Zahl bedeutet. Die Gleichungen (27) und (28) gelten ersichtlich für $n = 0$, denn man hat

$$a_0 = (0,0) - (0,1)b_1^2 + (0,2)b_1^4 - \dots \pm (0,k)b_1^{2k} \mp \dots$$

identisch mit $a_0 = 2$, und

$$a_1 = (1,0)a_1 - (1,1)a_1 b_1^2 + (1,2)a_1 b_1^4 - \dots \pm (1,k)a_1 b_1^{2k} \mp \dots$$

identisch mit $a_1 = a_1$. Bis zu welchem Werte von n man nun auch die Gültigkeit der Gleichungen, etwa durch wirkliche schrittweise Berechnung bewiesen habe, jedenfalls hat man

$$\begin{aligned} a_{2n+2} &= -a_{2n} + a_1 \cdot a_{2n+1} = \\ &= -(2n,0) + \dots \pm (2n,k-1)b_1^{2k-2} \mp \dots \\ &+ (2n+1,0) - \dots \mp (2n+1,k-1)a_1^2 b_1^{2k-2} \pm \dots \end{aligned}$$

Die folgenden Terme würden lauten

$$\mp (2n,k)b_1^{2k} \text{ und } \pm (2n+1,k)a_1^2 b_1^{2k}.$$

Ersetzt man hier a_1^2 durch $4 - b_1^2$, so spaltet sich die untere Reihe in deren zwei, und es wird $a_{2n+2} =$

$$\begin{aligned} &= -(2n,0) + (2n,1)b_1^2 - \dots \mp (2n,k)b_1^{2k} \pm \dots \\ &\quad - (2n+1,0)b_1^2 + \dots \pm (2n+1,k-1)b_1^{2k} \mp \dots \\ &+ 4(2n+1,0) - 4(2n+1,1)b_1^2 \dots \pm 4(2n+1,k)b_1^{2k} \mp \dots \end{aligned}$$

Die beiden ersten Glieder der rechten Seite, nämlich $-(2n,0)$ und $4(2n+1,0)$ [das letztere ist aus $(2n+1,0)a_1^2 = (2n+1,0)(4 - b_1^2)$ hervorgegangen] betragen zusammen

$$2 = (2n+2,0);$$

weiterhin sind jedesmal drei Glieder mit derselben Potenz von b_1 angegeben, und zwar ist

$$\mp (2n,k) \cdot b_1^{2k}$$

ein gewisses der vorher schon angegebenen Glieder für $k > 0$, ferner

$$\pm (2n + 1, k - 1) \cdot b_1^{2k}$$

aus $\mp (2n + 1, k - 1) a_1^2 \cdot b_1^{2k-2}$ hervorgegangen, indem man a_1^2 durch $4 - b_1^2$ ersetzt und bloß den zweiten der so entstehenden Terme (der erste ist als in den vorhergehenden Punkten enthalten aufzufassen) hingeschrieben hat, schliesslich

$$\pm 4 (2n + 1, k) \cdot b_1^{2k}$$

aus $\pm (2n + 1, k) \cdot a_1^2 b_1^{2k} = \pm (2n + 1, k) \cdot (4 - b_1^2) \cdot b_1^{2k}$ entnommen, während $\mp (2n + 1, k) \cdot b_1^{2k+2}$ in der mittleren Zeile eine Stelle weiter seinen Platz finden würde. Hiernach erhält man, indem man die angegebenen drei Reihen mindestens bis dahin, wo $k = n$, also $k + 1 = n + 1$ geworden ist, oder beliebig weit darüber hinaus fortsetzt, mittelst der Gleichung (23)

$$a_{2n+2} = (2n + 2, 0) - (2n + 2, 1) b_1^2 + (2n + 2, 2) b_1^4 - \dots \pm (2n + 2, k) b_1^{2k} \mp \dots$$

Ist also die rechte Seite von a_{2n} nach dem Gesetze (27), die rechte Seite von a_{2n+1} nach dem Gesetze (28) richtig gebildet, so erhält man die rechte Seite von a_{2n+2} wieder nach dem Gesetze (27), indem man darin überall n durch $n + 1$ ersetzt.

Weiter hat man

$$\begin{aligned} a_{2n+3} &= -a_{2n+1} + a_1 \cdot a_{2n+2} = \\ &= -(2n + 1, 0) a_1 + (2n + 1, 1) a_1 b_1^2 - \dots \mp (2n + 1, k) a_1 b_1^{2k} \pm \dots \\ &+ (2n + 2, 0) a_1 - (2n + 2, 1) a_1 b_1^2 + \dots \pm (2n + 2, k) a_1 b_1^{2k} \mp \dots, \end{aligned}$$

wo die Terme der rechten Seite mindestens bis dahin, wo sie Null werden, eben so gut aber beliebig weit darüber hinaus fortzusetzen sind. Mittelst (24) ergibt sich

$$\begin{aligned} & a_{2n+3} \\ &= (2n + 3, 0) a_1 - (2n + 3, 1) a_1 b_1^2 + \dots \pm (2n + 3, k) a_1 b_1^{2k} \mp \dots \end{aligned}$$

d. h. eine Reihe, die aus (28) sofort hervorgeht, wenn man überall n durch $n + 1$ ersetzt. Nun gelten die Gleichungen (27) und (28) für $n = 0$, also auch für $n + 1 (= 0 + 1) = 1$, dann, indem man nun $n = 1$ nimmt, weiter für $n + 1 (= 1 + 1) = 2$, u. s. w., d. h. allgemein. Sie brechen von selbst ab, sobald k

nach und nach einen hinlänglich grofsen Wert [n in (27) und (28)] angenommen hat.

14. Auch für die b entstehen zwei verschiedene Reihen, je nachdem der Index eine gerade oder ungerade Zahl ist. Man hat nämlich

$$\begin{aligned} b_1 \cdot b_{2n} &= a_{2n-1} - a_{2n+1} = \\ &= (2n-1,0)a_1 - (2n-1,1)a_1 b_1^2 + \dots \pm (2n-1,k)a_1 b_1^{2k} \mp \dots \\ &- (2n+1,0)a_1 + (2n+1,1)a_1 b_1^2 - \dots \mp (2n+1,k)a_1 b_1^{2k} \pm \dots, \end{aligned}$$

also wegen der Gleichung (25) [die beiden ersten Terme rechts heben sich]

$$\begin{aligned} b_1 \cdot b_{2n} &= \frac{n}{1} a_1 b_1^2 - \dots \mp \\ &\mp \frac{(n+k-1) \dots (n-k+1)}{1 \cdot 2 \dots 2k-1} a_1 b_1^{2k} \pm \dots \end{aligned}$$

oder auch

$$\begin{aligned} b_{2n} &= \frac{n}{1} a_1 b_1 - \frac{(n+1)n(n-1)}{1 \cdot 2 \cdot 3} a_1 b_1^3 + \dots \mp \\ &\mp \frac{(n+k-1) \dots (n-k+1)}{1 \cdot 2 \dots 2k-1} a_1 b_1^{2k-1} \pm \dots \end{aligned} \quad (29)$$

Die Vorzeichen sind dieselben, wie die in $-a_{2n+1}$, d. h. negativ, wenn k eine gerade, positiv, wenn k eine ungerade Zahl ist [in a_{2n+1} selbst war das Umgekehrte der Fall]. Für ungerade Indices von b ergibt sich

$$\begin{aligned} b_1 \cdot b_{2n+1} &= a_{2n} - a_{2n+2} = \\ &= (2n,0) - (2n,1)b_1^2 + \dots \pm (2n,k)b_1^{2k} \mp \dots \\ &- (2n+2,0) + (2n+2,1)b_1^2 - \dots \mp (2n+2,k)b_1^{2k} \pm \dots, \end{aligned}$$

also durch Anwendung der Gleichung (26), wenn man gleichzeitig mit b_1 hebt,

$$\begin{aligned} b_{2n+1} &= \quad (30) \\ &= (2n+1) \cdot \left[b_1 - \dots \mp \frac{(n+k-1) \dots (n-k+2)}{1 \cdot 2 \dots 2k-1} b_1^{2k-1} \pm \dots \right] \end{aligned}$$

wo aber für k mindestens 2 (dann der Reihe nach 3, 4...) genommen werden muß. Auch hier sind die Glieder negativ, wenn k gerade, positiv, wenn k ungerade ist.

Schließlich möge noch erwähnt werden, dafs für gerade Indices

$$a_{2n} = \\ = 2 - \frac{2n^2}{1 \cdot 2} b_1^2 + \frac{2n^2 \cdot (n^2 - 1^2)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} b_1^4 - \frac{2n^2 (n^2 - 1^2) (n^2 - 2^2)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6} b_1^6 + \dots$$

$$b_{2n} = \\ = \frac{n}{1} a_1 b_1 - \frac{n (n^2 - 1^2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} a_1 b_1^3 + \frac{n (n^2 - 1^2) (n^2 - 2^2)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} a_1 b_1^5 - \dots$$

geschrieben werden darf. Für ungerade Indices hat man

$$(2n+1, 1) = (n+1) \cdot \frac{n}{1 \cdot 2} = \frac{(2n+2) \cdot 2n}{1 \cdot 2 \cdot 2^2} = \frac{(2n+1+1) (2n+1-1)}{1 \cdot 2 \cdot 2^2} \\ = \frac{(2n+1)^2 - 1^2}{1 \cdot 2 \cdot 2^2},$$

$$(2n+1, 2) = (n+2) \cdot \frac{(n+1) n (n-1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}, \text{ worin } (n+2) (n-1) = \\ \frac{(2n+4) (2n-2)}{2^2} = \frac{(2n+1+3) (2n+1-3)}{2^2},$$

also

$$(2n+1, 2) = \frac{[(2n+1)^2 - 1^2] \cdot [(2n+1)^2 - 3^2]}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 2^4}.$$

Um $(2n+1, 3)$ zu bilden, hat man im Zähler $(n+3) (n-2)$, im Nenner $5 \cdot 6$ hinzuzufügen. Es ist aber $(n+3) (n-2) =$

$$\frac{(2n+6) (2n-4)}{2^2} = \frac{(2n+1+5) (2n+1-5)}{2^2} = \frac{(2n+1)^2 - 5^2}{2^2}, \text{ also}$$

$$(2n+1, 3) = \frac{[(2n+1)^2 - 1^2] \cdot [(2n+1)^2 - 3^2] \cdot [(2n+1)^2 - 5^2]}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 2^6},$$

u. s. w. Man erhält also

$$a_{2n+1} = \\ = a_1 - \frac{(2n+1)^2 - 1^2}{1 \cdot 2 \cdot 2^2} a_1 b_1^2 + \frac{[(2n+1)^2 - 1^2] \cdot [(2n+1)^2 - 3^2]}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 2^4} \cdot a_1 b_1^4 \dots$$

Die Coëfficienten in b_{2n+1} lauten, abgesehen von dem ersten $(2n+1)$,

$$(2n+1) \cdot \frac{(n+1) n}{1 \cdot 2 \cdot 3} = \frac{(2n+1) [(2n+1)^2 - 1^2]}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 2^2} \quad (\text{m. s. oben, wo}$$

$(n+1) n$ umgeformt ist),

$$(2n+1) \cdot \frac{(n+2)(n+1)n(n-1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} =$$

$$\frac{(2n+1)[(2n+1)^2-1^2][(2n+1)^2-3^2]}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 2^4}$$

u. s. w. Man findet demnach

$$b_{2n+1} = (2n+1)b_1 - \frac{(2n+1)[(2n+1)^2-1^2]}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 2^2} b_1^3 +$$

$$+ \frac{(2n+1)[(2n+1)^2-1^2] \cdot [(2n+1)^2-3^2]}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 2^4} \cdot b_1^5 - \dots$$

15. Die in den Nummern 12 bis 14 durchgeführten Entwicklungen gelten für alle Werte von a_1 . Wählt man speziell a_1 zwischen -2 und $+2$, so bedeuten a_1 und b_1 den doppelten cos und sin eines bestimmten Winkels, der mit x bezeichnet werden mag, a_n und b_n die doppelten cos und sin des Winkels nx . Man erhält also aus den vier letzten Formeln der vorhergehenden Nummer

$$2 \cdot \cos(2nx) = 2 - \frac{2n^2}{1 \cdot 2} \cdot 2^2 \cdot (\sin x)^2 + \frac{2n^2(n^2-1^2)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} \cdot 2^4 (\sin x)^4 - \dots$$

oder durch Division mit 2

$$\cos(2nx) = 1 - \frac{(2n)^2}{1 \cdot 2} (\sin x)^2 + \frac{(2n)^2 \cdot [(2n)^2 - 2^2]}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} (\sin x)^4 -$$

$$- \frac{(2n)^2 \cdot [(2n)^2 - 2^2] \cdot [(2n)^2 - 4^2]}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6} (\sin x)^6 + \dots, \quad (31)$$

wenn nämlich $n^2 \cdot 2^2$ in $(2n)^2$, $n^2(n^2-1^2) \cdot 2^4$ in $(2n)^2[(2n)^2-2^2]$ u. s. w. umgeformt wird. Weiter hat man

$$2 \cdot \sin(2nx) = \frac{n}{1} \cdot 4 \cos x \cdot \sin x - \frac{n(n^2-1^2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} 2^4 \cos x \cdot (\sin x)^3 + \dots,$$

oder durch Division mit 2 (und eine der eben angegebenen ähnliche Umgestaltung)

$$\sin(2nx) = \frac{2n}{1} \cdot \cos x \cdot \sin x - \frac{2n[(2n)^2-2^2]}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cos x \cdot (\sin x)^3 + \dots, (32^*)$$

ferner

$$2 \cdot \cos[(2n+1)x] = 2 \cos x - \frac{(2n+1)^2-1^2}{1 \cdot 2 \cdot 2^2} \cdot 2 \cos x \cdot 2^2 (\sin x)^2 +$$

$$+ \frac{[(2n+1)^2-1^2] \cdot [(2n+1)^2-3^2]}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 2^4} 2 \cos x \cdot 2^4 (\sin x)^4 - \dots,$$

woraus folgt

$$\begin{aligned} \cos [(2n+1)x] = & \cos x - \frac{(2n+1)^2 - 1^2}{1 \cdot 2} \cos x (\sin x)^2 + \\ & + \frac{[(2n+1)^2 - 1^2][(2n+1)^2 - 3^2]}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} \cos x (\sin x)^4 - \dots; \end{aligned} \quad (33)^*$$

und schliesslich

$$\begin{aligned} 2 \sin [(2n+1)x] = & (2n+1) \cdot 2 \sin x - \\ & - \frac{(2n+1)[(2n+1)^2 - 1^2]}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 2^2} 2^3 (\sin x)^3 + \dots, \end{aligned}$$

also

$$\begin{aligned} \sin [(2n+1)x] = & (2n+1) \sin x - \\ & - \frac{(2n+1)[(2n+1)^2 - 1^2]}{1 \cdot 2 \cdot 3} (\sin x)^3 + \dots \end{aligned} \quad (34)$$

Was die Grössen α_x und $\gamma_x (= \frac{1}{i} \beta_x)$ betrifft, welche entstanden, wenn man α_1 (statt a_1 geschrieben) > 2 wählte, wobei β_1 imaginär $= i\gamma_1$ wurde, so ist sofort klar, dass $\frac{1}{2}\alpha_x$ und $\frac{1}{2}\gamma_x$ aus den vier letzten Resultaten abgeleitet werden können, wenn man $\frac{1}{2}i\gamma_1$ statt $\sin x$, $\frac{1}{2}\alpha_1$ statt $\cos x$ setzt. Man erhält demnach

$$\frac{1}{2}\alpha_{2n} = 1 + \frac{(2n)^2}{1 \cdot 2} \left(\frac{1}{2}\gamma_1\right)^2 + \frac{(2n)^2 \cdot [(2n)^2 - 2^2]}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} \left(\frac{1}{2}\gamma_1\right)^4 + \dots$$

$$\frac{1}{2}\gamma_{2n} = \frac{2n}{1} \cdot \frac{1}{2}\alpha_1 \cdot \frac{1}{2}\gamma_1 + \frac{2n[(2n)^2 - 2^2]}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot \frac{1}{2}\alpha_1 \cdot \left(\frac{1}{2}\gamma_1\right)^3 + \dots$$

$$\frac{1}{2}\alpha_{2n+1} = \frac{1}{2}\alpha_1 + \frac{(2n+1)^2 - 1^2}{1 \cdot 2} \cdot \frac{1}{2}\alpha_1 \left(\frac{1}{2}\gamma_1\right)^2 + \dots$$

$$\frac{1}{2}\gamma_{2n+1} = (2n+1) \cdot \frac{1}{2}\gamma_1 + \frac{(2n+1)[(2n+1)^2 - 1^2]}{1 \cdot 2 \cdot 3} \left(\frac{1}{2}\gamma_1\right)^3 + \dots$$

Hier kann man dann noch die Bezeichnungen (No. 10)

* Die Reihen (32) und (33) können auch auf solche Gestalten wie (31) und (34) gebracht werden, aber mit unbegrenzter Gliederanzahl.

$$\frac{1}{2} \alpha = \operatorname{cof} x = \cos (ix), \quad \frac{1}{2} \beta = i \operatorname{fin} x = \sin (ix),$$

$$\frac{1}{2} \gamma = \frac{1}{2} \frac{\beta}{i} = \operatorname{fin} x$$

zur Anwendung bringen, allerdings mit der Bedingung, daß man aus der Schreibweise $\cos$ und $\sin$ keine nicht besonders bewiesenen Folgerungen ableite. Die so entstehenden Formeln lauten

$$\begin{aligned} \operatorname{cof} (2n x) &= \\ &= 1 + \frac{(2n)^2}{1 \cdot 2} (\operatorname{fin} x)^2 + \frac{(2n)^2 \cdot [(2n)^2 - 2^2]}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} (\operatorname{fin} x)^4 + \dots \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \operatorname{fin} (2n x) &= \\ &= \frac{2n}{1} \cdot \operatorname{cof} x \cdot \operatorname{fin} x + \frac{2n [(2n)^2 - 2^2]}{1 \cdot 2 \cdot 3} \operatorname{cof} x \cdot (\operatorname{fin} x)^3 + \dots \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \operatorname{cof} [(2n + 1) x] &= \\ &= \operatorname{cof} x + \frac{(2n + 1)^2 - 1^2}{1 \cdot 2} \operatorname{cof} x (\operatorname{fin} x)^2 + \dots \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \operatorname{fin} [(2n + 1) x] &= \\ &= \frac{2n + 1}{1} \operatorname{fin} x + \frac{(2n + 1) [(2n + 1)^2 - 1^2]}{1 \cdot 2 \cdot 3} (\operatorname{fin} x)^3 + \dots \end{aligned}$$

Um die noch möglichen Schreibweisen anzugeben, hätte man

$$\operatorname{cof} \text{ durch } \cos, \operatorname{fin} \text{ durch } \frac{1}{i} \sin \text{ und gleichzeitig } x \text{ durch } ix$$

zu ersetzen. Man erhält dann genau die Gestalten (31) bis (34), auch dieselben Vorzeichen der einzelnen Terme (abwechselnd positiv und negativ), nur mit dem Unterschiede, daß die Argumente ix , $2nix$ und $(2n + 1)ix$ lauten.

In Betreff der mit $\frac{1}{2} A$ und $\frac{1}{2} B$ bezeichneten imaginären

Größen soll vorweg festgestellt werden, daß man

$$\begin{aligned} \cos (x + yi) &= \cos x \cdot \cos (yi) - \sin x \cdot \sin (yi) \\ \sin (x + yi) &= \sin x \cdot \cos (yi) + \cos x \cdot \sin (yi) \end{aligned}$$

zu nehmen habe. Diese Definition ist erlaubt, da zwar über $\cos x$, $\sin x$, $\cos (ix)$, $\sin (ix)$, nicht aber über den Sinn von $\cos (x + yi)$, $\sin (x + xi)$ verfügt ist.

Wir setzen nun $\cos x = \frac{1}{2} a_1$, $\cos y i = \frac{1}{2} \alpha_1$, $\sin x = \frac{1}{2} b_1$,
 $\sin yi = \frac{i}{2} \gamma_1$. Dann ist

$$\cos (x + yi) = \frac{1}{2} a_1 \cdot \frac{1}{2} \alpha_1 - \frac{i}{2} b_1 \cdot \frac{1}{2} \gamma_1 = \frac{1}{2} A_1$$

$$\sin (x + yi) = \frac{1}{2} b_1 \cdot \frac{1}{2} \alpha_1 + \frac{i}{2} a_1 \cdot \frac{1}{2} \gamma_1 = \frac{1}{2} B_1,$$

wo unter a_1 , α_1 , b_1 , γ_1 die im Vorhergehenden definierten Größen zu verstehen sind. Die vier rechts angegebenen Ausdrücke sind schon in Nr. 5 behandelt und dort mit $\frac{1}{2} A_1$ und $\frac{1}{2} B_1$ bezeichnet worden — (man nehme in den Gleichungen (8'') und (8''') die unteren Vorzeichen) —; demnach gelten für dieselben die dort entwickelten Resultate, so namentlich die Gleichungen (9')

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} A_n &= \frac{1}{2} a_n \cdot \frac{1}{2} \alpha_n - \frac{i}{2} b_n \cdot \frac{1}{2} \gamma_n = \cos (nx) \cdot \cos (nyi) \\ &\quad - \sin (nx) \cdot \sin (nyi) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} B_n &= \frac{1}{2} b_n \cdot \frac{1}{2} \alpha_n + \frac{i}{2} a_n \cdot \frac{1}{2} \gamma_n = \sin (nx) \cdot \cos (nyi) \\ &\quad + \cos (nx) \cdot \sin (nyi). \end{aligned}$$

Für die rechten Seiten kann in Folge der oben gegebenen Definitionen

$$\cos (nx + nyi) \text{ und } \sin (nx + nyi)$$

geschrieben werden. Die in No. 12 bis 14 angegebenen Entwicklungen gelten aber auch für die Größen $\frac{1}{2} A_n$, $\frac{1}{2} B_n$, $\frac{1}{2} A_1$, $\frac{1}{2} B_1$; demnach darf man schliesslich auf $\cos [n(x + yi)]$ und $\sin [n(x + yi)]$, wenn man beständig die Definitionen dieser Functionen beachtet, die Gleichungen (31) bis (34) anwenden, indem man statt des Argumentes x das Argument $x + yi$ benutzt.

Vierter Abschnitt.

Reihen für cos und sin eines beliebigen Argumentes.

16. Nach dem Vorhergehenden ist man im Stande, sobald cos und sin irgend eines Argumentes bekannt sind, cos und sin beliebiger ganzer Vielfachen dieses Argumentes zu berechnen. Es handelt sich nun, um die Darstellung dieser, je nach dem Werte von a_1 genau definierten, Functionen bis zu einem gewissen Grade abzuschließen, darum, eine Methode ihrer Berechnung für ein beliebig gegebenes Argument darzustellen.

Zu diesem Ende betrachten wir die Entwicklung der n^{ten} Potenz des Binoms $1 + \frac{x+yi}{n}$, wo n eine positive ganze Zahl bedeutet, x und y reell sind, nämlich

$$\begin{aligned} \left(1 + \frac{x+yi}{n}\right)^n &= 1 + \frac{n}{1} \cdot \left(\frac{x+yi}{n}\right) + \frac{n \cdot n - 1}{1 \cdot 2} \left(\frac{x+yi}{n}\right)^2 + \\ &+ \frac{n \cdot n - 1 \cdot n - 2}{1 \cdot 2 \cdot 3} \left(\frac{x+yi}{n}\right)^3 + \dots \end{aligned}$$

Dieselbe lässt sich umformen in

$$\begin{aligned} \left(1 + \frac{x+yi}{n}\right)^n &= 1 + \frac{x+yi}{1} + \left(1 - \frac{1}{n}\right) \cdot \frac{(x+yi)^2}{1 \cdot 2} + \\ &+ \left(1 - \frac{1}{n}\right) \left(1 - \frac{2}{n}\right) \cdot \frac{(x+yi)^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \dots \end{aligned}$$

Es ist nämlich 1 statt $\frac{n}{n}$, $1 - \frac{1}{n}$ statt $\frac{n-1}{n}$, $1 - \frac{2}{n}$ statt $\frac{n-2}{n}$ u. s. w. geschrieben.

Man setze jetzt

$$\sqrt{x^2 + y^2} = r, \quad \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \cos z, \quad \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \sin z,$$

also

$$x + yi = r (\cos z + i \sin z),$$

wo r , der positive Wert von $\sqrt{x^2 + y^2}$, die Norm der complexen Gröfse $x + yi$ genannt wird. Was den Winkel z betrifft, so ist ein solcher für alle beliebigen Werte von x und y jedes-

mal vorhanden, weil $\left(\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}\right)^2 + \left(\frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}\right)^2 = 1$ und jeder

dieser Brüche höchstens 1 ist; er liegt zwischen 0 und $\frac{\pi}{2}$, wenn x

und y positiv, zwischen $\frac{\pi}{2}$ und π , wenn x negativ und y positiv,

zwischen π und $\frac{3\pi}{2}$, wenn x und y negativ, zwischen $\frac{3\pi}{2}$ und

2π , wenn x positiv und y negativ ist. Da $(\cos z + i \sin z)^m = \cos mz + i \sin mz$, so wird, wenn man die reellen und die (mit i behafteten) imaginären Terme der rechten Seite zusammenstellt

$$\begin{aligned} \left(1 + \frac{x + yi}{n}\right)^n &= 1 + \left[\frac{r}{1} \cdot \cos z + \left(1 - \frac{1}{n}\right) \cdot \frac{r^2}{1 \cdot 2} \cdot \cos 2z + \right. \\ &\quad \left. + \left(1 - \frac{1}{n}\right) \left(1 - \frac{2}{n}\right) \cdot \frac{r^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot \cos 3z + \dots \right] \\ &\quad + i \left[\frac{r}{1} \cdot \sin z + \left(1 - \frac{1}{n}\right) \cdot \frac{r^2}{1 \cdot 2} \cdot \sin 2z + \right. \\ &\quad \left. + \left(1 - \frac{1}{n}\right) \left(1 - \frac{2}{n}\right) \cdot \frac{r^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot \sin 3z + \dots \right] \end{aligned} \quad (35)$$

Wir betrachten jetzt die beiden in den Klammern rechterseits stehenden Reihen. Da $\cos z$, $\cos 2z$, $\cos 3z$ u. s. w., $\sin z$, $\sin 2z$, $\sin 3z$ u. s. w. zwischen -1 und $+1$ liegen und die Factoren $\left(1 - \frac{1}{n}\right)$, $\left(1 - \frac{2}{n}\right)$, u. s. w., sämtlich positiv und kleiner als 1 sind — (die Reihen endigen, sobald der Factor

* Statt der Grenzen π und $\frac{3\pi}{2}$, $\frac{3\pi}{2}$ und 2π kann man auch die Grenzen $-\frac{\pi}{2}$ und $-\pi$, 0 und $-\frac{\pi}{2}$ benutzen.

$\left(1 - \frac{n}{n}\right) = 0$ auftritt) —, so sind die Grenzen, welchen die Summen der Reihen nach der negativen und positiven Seite äußersten Falls nahe kommen können

— $\left[\frac{r}{1} + \frac{r^2}{1 \cdot 2} + \frac{r^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \dots\right]$ u. $\left[\frac{r}{1} + \frac{r^2}{1 \cdot 2} + \frac{r^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \dots\right]$; im allgemeinen werden ihre Werte zwischen diesen Grenzen enthalten sein.

Man denke nun eine Anzahl m ($< n$) der in (35) genannten Glieder von $\frac{r}{1}$ an bis $\frac{r^m}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots m}$ summiert und die Summe mit S bezeichnet, während die der noch übrigen s genannt werde, so daß

$$(36) \quad s = \frac{r^{m+1}}{1 \cdot 2 \dots m + 1} + \dots + \frac{r^n}{1 \cdot 2 \dots n} =$$

$$= \frac{r^{m+1}}{1 \cdot 2 \dots m + 1} \cdot \left[1 + \frac{r}{m+2} + \frac{r}{m+2} \cdot \frac{r}{m+3} + \dots\right].$$

Der Wert des Factors

$$(37) \quad \frac{r^{m+1}}{1 \cdot 2 \dots m + 1} = \frac{r}{1} \cdot \frac{r}{2} \cdot \frac{r}{3} \dots \frac{r}{m+1}$$

hängt ersichtlich einerseits von der Größe der positiven Zahl r , andererseits der positiven ganzen Zahl $m+1$ ab. Bezeichnet man diejenige positive ganze Zahl, welche gleich oder um einen ächten Bruch kleiner als r ist, mit μ (wo μ die Werte 0, 1, 2, ... besitzen kann), so ist $\frac{r}{\mu+1} < 1$, ferner $\frac{r}{\mu+2} < \frac{r}{\mu+1}$, $\frac{r}{\mu+3} < \frac{r}{\mu+2}$, u. s. w. und es kann $\frac{r}{\mu+\nu}$, wenn ν nur hinlänglich groß gewählt wird, kleiner gemacht werden, als jeder auch noch so kleine Bruch. Möge nun schon $\frac{r}{1}$ ein ächter Bruch sein (wenn nämlich r zwischen 0 und 1 liegt), oder mögen die Brüche $\frac{r}{1}$, $\frac{r}{2}$, $\frac{r}{3}$ u. s. w. bis zu einem gewissen $\frac{r}{\mu}$ größer als 1, ihr Produkt also nach und nach an Wert gestiegen sein: jedesmal wird, wenn man dann die Factoren $\frac{r}{\mu+1}$, $\frac{r}{\mu+2}$, ...

$\frac{r}{m+1}$ hinzufügt, der Wert des so entstandenen Productes immer mehr abnehmen und so klein gemacht werden können, als man nur immer will. Versteht man also in (37) unter $m+1$ eine hinlänglich groſse Zahl — (die Zahl n muſs der Voraussetzung nach aber noch gröſser als $m+1$ sein) —, so nimmt

$$\frac{r^{m+1}}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots m+1}$$

einen beliebig kleinen Wert an.

Setzt man jetzt $\frac{r}{m+2} = \rho$, so ist die in (36) angegebene Klammer

$$1 + \frac{r}{m+2} + \frac{r}{m+2} \cdot \frac{r}{m+3} + \dots < 1 + \rho + \rho^2 + \dots + \rho^{n-m-1}$$

$$\text{d. i. } < \frac{1 - \rho^{n-m}}{1 - \rho} < \frac{1}{1 - \rho}.$$

Demnach hat man

$$s < \frac{r^{m+1}}{1 \cdot 2 \dots m+1} \cdot \frac{1}{1 - \rho},$$

wo zwar $\frac{1}{1 - \rho}$ (aber beliebig wenig) > 1 , aber trotzdem die rechte Seite beliebig klein gemacht werden kann. Die Summe

$$\frac{r}{1} + \frac{r^2}{1 \cdot 2} + \frac{r^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \dots + \frac{r^n}{1 \cdot 2 \dots n}$$

kann also, wenn man nur eine hinlänglich groſse Anzahl (m) ihrer Glieder wirklich summiert, mit jedem, willkürlich festgestellten, Grade der Genauigkeit gefunden werden. Dasselbe gilt dann auch von den in (35) angegebenen Summen.

17. Es sind nun noch die Factoren $\left(1 - \frac{1}{n}\right)$, $\left(1 - \frac{2}{n}\right)$, ..., $\left(1 - \frac{m}{n}\right)$ zu beachten. Jedenfalls ist

$$1 > \left(1 - \frac{1}{n}\right) > \left(1 - \frac{1}{n}\right) \left(1 - \frac{2}{n}\right) > \dots >$$

$$> \left(1 - \frac{1}{n}\right) \left(1 - \frac{2}{n}\right) \dots \left(1 - \frac{m}{n}\right) > \left(1 - \frac{m}{n}\right)^m.$$

Wir setzen $n = m \cdot k$, wo k eine Zahl bedeutet, von der nachher festgestellt werden wird, daß man sie hinlänglich groß wähle. Dann ist

$$\begin{aligned} \left(1 - \frac{m}{n}\right)^m &= \left(1 - \frac{1}{k}\right)^m = 1 - \frac{m}{1} \cdot \frac{1}{k} + \frac{m \cdot m - 1}{1 \cdot 2} \cdot \frac{1}{k^2} \\ &\quad - \frac{m \cdot m - 1 \cdot m - 2}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot \frac{1}{k^3} + \dots \end{aligned}$$

Wird $k > m$ genommen, so ist ersichtlich das dritte Glied der Entwicklung größer als das vierte, das fünfte größer als das sechste u. s. w. Ist also m ungerade, so besteht die Reihe aus gleichviel positiven und negativen Termen und ist deshalb größer als $1 - \frac{m}{k}$; ist m gerade, so endigt die Reihe mit einem positiven Terme, so daß in beiden Fällen

$$\left(1 - \frac{m}{n}\right)^m > 1 - \frac{m}{k}.$$

Man darf k so viel mal größer als m wählen, daß $\frac{m}{k}$ beliebig klein wird; setzt man also

$$\begin{aligned} 1 - \frac{1}{n} &= 1 - \delta_1, \left(1 - \frac{1}{n}\right) \left(1 - \frac{2}{n}\right) = 1 - \delta_2, \dots, \\ \left(1 - \frac{1}{n}\right) \left(1 - \frac{2}{n}\right) \dots \left(1 - \frac{m}{n}\right) &= 1 - \delta_m, \end{aligned}$$

so können die Werte der δ so klein gemacht werden, als man nur immer will. Die Reihe (35) nimmt nun folgende Form an:

$$\begin{aligned} \left(1 + \frac{x + y i}{n}\right)^n &= 1 + \frac{r}{1} \cos z + \frac{r^2}{1 \cdot 2} \cos 2z + \dots + \frac{r^m}{1 \cdot 2 \dots m} \cos m z \\ &\quad - \delta_1 \cdot \frac{r^2}{1 \cdot 2} \cos 2z - \dots - \delta_{m-1} \frac{r^m}{1 \cdot 2 \dots m} \cos m z \\ &\quad + i \left[\frac{r}{1} \sin z + \frac{r^2}{1 \cdot 2} \sin 2z + \dots + \frac{r^m}{1 \cdot 2 \dots m} \cos m z \right] \\ &\quad + i \left[-\delta_1 \cdot \frac{r^2}{1 \cdot 2} \sin 2z - \dots - \delta_{m-1} \cdot \frac{r^m}{1 \cdot 2 \dots m} \sin m z \right]. \end{aligned}$$

Vereinigt man die Terme, welche kein δ enthalten, in der Art paarweise, daß aus $r (\cos z + i \sin z)$ wieder $x + y i$, aus $r^2 (\cos 2z + i \sin 2z) = (x + y i)^2$, u. s. w. entsteht, und bezeichnet die Summe der übrigen Terme mit $R + i R'$, so hat man

$$\left(1 + \frac{x + yi}{n}\right)^n = 1 + \frac{x + yi}{1} + \frac{(x + yi)^2}{1 \cdot 2} + \dots + \frac{(x + yi)^m}{1 \cdot 2 \dots m} + R + iR'.$$

Was den Rest $R + iR'$ betriff, so ist $\frac{m}{k}$ der grösste Wert, welchen irgend ein δ annehmen kann. Demnach kann der absolute Wert von R und R' nicht gröfser sein als

$$\frac{m}{k} \left(\frac{r^2}{1 \cdot 2} + \frac{r^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \dots + \frac{r^m}{1 \cdot 2 \dots m} \right).$$

Welchen Wert diese Klammer nun auch besitze: immer kann man k so grofs, also $\frac{m}{k}$ so klein wählen, dafs das angegebene

Product kleiner wird, als jeder auch noch so kleine Bruch. Man darf also schliesslich mit beliebiger Genauigkeit die Gleichung

$$\left(1 + \frac{x + yi}{n}\right)^n = 1 + \frac{x + yi}{1} + \frac{(x + yi)^2}{1 \cdot 2} + \dots + \frac{(x + yi)^m}{1 \cdot 2 \dots m} \quad (38)$$

aufstellen, wo die Summation auf der rechten Seite auch beliebig weit über $\frac{(x + yi)^m}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots m}$ hinaus ausgedehnt gedacht, oder, was dasselbe sagen will, m gröfser gewählt werden kann, als unter den in jedem einzelnen Falle vorgeschriebenen Bedingungen der Genauigkeit eben noch nötig wäre.

18. Wegen der grofsen Wichtigkeit der in Gleichung (38) dargestellten Beziehung soll noch eine Betrachtung, welche den Gegenstand von einer anderen Seite berührt, angefügt werden.

Gesetzt, man habe die Absicht, von jeder der Funktionen

$$\left(1 + \frac{x + yi}{1}\right)^1, \left(1 + \frac{x + yi}{2}\right)^2, \text{ u. s. w.}$$

je eine Tabelle für möglichst viele Wertsysteme x, y , wo sowohl die x , als auch die y in aufserordentlich kleinen Abstufungen auf einander folgten, herzustellen, oder auch nur hergestellt zu denken. Je eine hinlänglich grofse Ebene von (wenn man will) quadratischer Gestalt sei durch senkrechte und wagerechte Linien in eine sehr grofse Anzahl gleicher Quadrate geteilt. Links von den horizontalen Streifen seien die in kleinen Intervallen auf einander folgenden Werte der x , oben mit einer sehr grofsen

negativen Zahl x beginnend, unten mit einer sehr großen positiven Zahl x endigend, angegeben. Ebenso verfähre man mit den y von links nach rechts, so daß über jedem Verticalstreifen ein bestimmter Wert (y) steht. In dasjenige Quadrat, in welchem sich ein bestimmter Horizontal- und Verticalstreifen kreuzen, werde auf der ersten Tabelle der für das daselbst geltende x und y ermittelte Wert von $\left(1 + \frac{x + yi}{1}\right)^1$, auf der zweiten der Wert von $\left(1 + \frac{x + yi}{2}\right)^2$ u. s. w. eingetragen und ebenso mit allen übrigen Quadraten verfahren. Wollte man die Intervalle verkleinern, so würden diesem Unternehmen vielleicht praktische Schwierigkeiten entgegen stehen, worauf es aber hier gar nicht ankommt. Nichts hindert die Intervalle so klein gewählt zu denken, als man nur immer will; jedenfalls ist eine Grenze für dieses Vorgehen nicht vorhanden. Man bezeichnet dann die Intervalle als sehr klein, oder hinlänglich klein, ohne freilich bestimmt angeben zu wollen, wie klein. Ebenso kann man die Tabelle nach oben und unten, nach links und rechts immer mehr erweitert denken, und dann die negativen und positiven Endwerte wieder unbestimmt, als (negativ oder positiv) sehr groß bezeichnen. Jeden, wenn auch noch so großen, wirklichen (oder wie man sich ausdrückt „endlichen“) Wert von x und y kann man sich den Tabellen einverleibt denken.

Vergleicht man nun diejenigen Tabellen, in welchen die Berechnungen von

$$(39) \quad \left(1 + \frac{x + yi}{n}\right)^n$$

für immer größere Werte von n ausgeführt sind, mit einander, so werden dieselben immer mehr mit einander übereinstimmen. Auch könnte man den Grad der Uebereinstimmung oder das Maximum der noch denkbaren Abweichungen feststellen. Durch

geeignete Wahl der in Vorhergehendem mit m , n und $k = \frac{n}{m}$

bezeichneten Zahlen, von denen nur dies feststeht, daß sie größer und größer genommen werden sollen, ohne daß eine Grenze für ihre Zunahme angebar wäre, kann erreicht werden,

erstens, daß die Summe von m Termen der binomischen Reihe, statt der wirklich vorhandenen $n + 1$, den Wert von (39) bis auf eine willkürlich kleine Abweichung darstellt;

zweitens, daß die nun auszuführende Summation (35) beliebig nahe mit (38) zusammenfällt.

Schließlich soll noch bemerkt werden, daß man (38) auch in folgenden Formen benutzen kann. Setzt man $x = -y' = i^2 y'$ und $y = x'$, so ist

$$x + yi = i^2 y' + ix' = i(x' + iy').$$

Man erhält so

$$\begin{aligned} \left(1 + \frac{x + yi}{n}\right)^n &= \left(1 + i \frac{x' + y'i}{n}\right)^n = 1 + i \frac{x' + y'i}{1} + i^2 \cdot \frac{(x' + y'i)^2}{1 \cdot 2} \\ &+ i^3 \cdot \frac{(x' + y'i)^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \dots \end{aligned} \quad (39')$$

und, wenn man x' durch $-x'$, y' durch $-y'$ ersetzt,

$$\left(1 - i \frac{x' + y'i}{n}\right)^n = 1 - i \frac{x' + y'i}{1} + i^2 \cdot \frac{(x' + y'i)^2}{1 \cdot 2} - i^3 \frac{(x' + y'i)^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \dots (39'')$$

19. In No. 10 (man vergleiche die Figur) ist x als der Bogen AC oder auch als der doppelte Flächeninhalt des Sectors OAC bezeichnet worden. Denkt man noch die Gerade AC gezogen, so kann man BC oder $\sin x$ als die doppelte Fläche des Dreiecks OAC auffassen. Da $\triangle OBC \sim \triangle OAL$ (wenn $AL \perp AO$),

so ist $\frac{AL}{AO} = \frac{BC}{BO} = \frac{\sin x}{\cos x}$; AL besitzt aber einen Wert, der die doppelte Fläche des Dreiecks OAL ausdrückt. Hiernach ist

$$\sin x < x < \frac{\sin x}{\cos x},$$

jedenfalls so lange $\cos x$ nicht negativ, also x nicht größer als $\frac{\pi}{2}$ ist. Setzt man in der Gleichung (31) $\frac{x}{2}$ statt x und $n = 1$,

so wird $\cos x = 1 - 2 \sin^2 \frac{x}{2}$, also $1 - \cos x = 2 \cdot \sin^2 \frac{x}{2}$. Es

liegt aber $\sin \frac{x}{2}$ zwischen 0 und $\frac{x}{2}$, also $\sin^2 \frac{x}{2}$ zwischen 0 und

$\frac{x^2}{4}$, und man hat $1 - \cos x = \varepsilon \cdot \frac{x^2}{2}$, wo ε eine positive Zahl zwischen

Null und 1 bedeutet. Demnach wird

$$\cos x = 1 - \varepsilon \cdot \frac{x^2}{2}. \quad (40)$$

Weiter werde gesetzt

$$\sin x = x - \delta x^3, \quad (41)$$

wo δ eine positive Zahl bedeutet (also > 0), von der noch ermittelt werden soll, dass sie den Wert $\frac{1}{2}$ nicht überschreiten kann.

Aus $x < \frac{\sin x}{\cos x}$ folgt

$$x \cdot \cos x < \sin x \text{ oder } x \left(1 - \varepsilon \cdot \frac{x^2}{2}\right) < x - \delta x^3.$$

Durch Division mit x (welches nicht Null sein soll) ergibt sich

$$1 - \varepsilon \cdot \frac{x^2}{2} < 1 - \delta \cdot x^2 \text{ oder } \delta x^2 < \frac{\varepsilon}{2} \cdot x^2,$$

d. h. δ muss kleiner als $\frac{\varepsilon}{2}$, also kleiner als $\frac{1}{2}$ sein.

Was die in No. 11 betrachteten Functionen $\cos x$ und $\sin x$ betrifft, so war mit x die doppelte Fläche eines von O aus gerechneten Sectors, welchen man, falls z. B. $\cos x = OA_1$, $\sin x = A_1 C_1$ war, dadurch erhielt, dass man zwischen C und C_1 immer mehr Punkte der Hyperbel interpoliert dachte. Alle diese Punkte liegen, wenn $CE \perp OC$ steht, sicher zwischen CE und CC_1 . Demnach ist die doppelte Fläche des Dreiecks OCC_1 gröfser als x und dies wieder gröfser als die doppelte Fläche des Dreiecks OCE . Das doppelte Dreieck OCC_1 ist aber gleich $OC \cdot A_1 C_1 = \sin x$, wenn wir nur positive Werte von $\sin x$ betrachten; ferner ist das doppelte Dreieck $OCE = OC \cdot CE = \frac{\sin x}{\cos x}$, wie leicht aus der Aehnlichkeit der Dreiecke OCE und $OA_1 C_1$ folgt. Man hat also, sobald $\sin x$ positiv gewählt wird,

$$\sin x > x > \frac{\sin x}{\cos x}.$$

Es möge weiter festgestellt werden, dass $\sin x < \frac{1}{2}$, also auch $x < \frac{1}{2}$ sei. Aus der Gleichung $\cos x = \sqrt{1 + \sin^2 x}$ folgt $\cos x < 1 + \frac{1}{2} \sin^2 x$, wie man sich durch Quadrieren des letzten

Ausdrucks leicht überzeugt. Da nun $\cos x > 1$ ist, so kann man

$$\cos x = 1 + \varepsilon \cdot \sin^2 x$$

setzen, wo $\varepsilon < \frac{1}{2}$. Da dann $\varepsilon \cdot \sin x < \frac{1}{4}$ ist, so gilt auch noch die Gleichung

$$\cos x = 1 + \varepsilon' \cdot \sin x,$$

wo $\varepsilon' < \frac{1}{4}$. Aus $x > \frac{\sin x}{\cos x}$ erhält man jetzt

$$x(1 + \varepsilon' \cdot \sin x) > \sin x \text{ oder } x > \sin x(1 - \varepsilon' x),$$

woraus man die Ungleichung

$$\frac{x}{1 - \varepsilon' x} > \sin x$$

ableiten kann. Der Bruch $\frac{1}{1 - \varepsilon' x}$ ist aber hier kleiner als $1 + 2\varepsilon' \cdot x$, weil

$$1 < (1 - \varepsilon' x)(1 + 2\varepsilon' x) = 1 + \varepsilon' x - 2\varepsilon'^2 x^2;$$

denn $\varepsilon' x - 2\varepsilon'^2 x^2 = \varepsilon' x(1 - 2\varepsilon' x)$ ist positiv, weil $2\varepsilon' x < 1$. Demnach wird

$$x(1 + 2\varepsilon' x) > \sin x \text{ oder } \sin x < x + 2\varepsilon' x^2,$$

wo $2\varepsilon' < \frac{1}{2}$ sein muß. Wegen $\sin x > x$ kann man also die Gleichung bilden

$$\sin x = x + \delta' \cdot x^2 \quad (42)$$

in welcher $\delta' < \frac{1}{2}$. Durch Quadrieren erhält man

$$\sin^2 x = x^2 + 2\delta' x^3 + \delta'^2 x^4 = 2x^2 - x^2(1 - 2\delta' x - \delta'^2 x^2).$$

Die zuletzt angegebene Klammer ist positiv, weil $2\delta' x < \frac{1}{2}$ und $\delta'^2 x^2 < \frac{1}{16}$. Man darf also $\sin^2 x = \vartheta \cdot x^2$ setzen, wenn ϑ eine Zahl < 2 bedeutet. Hiermit ergibt sich schliesslich

$$\cos x = 1 + \eta \cdot x^2, \quad (43)$$

wo $\eta = \vartheta \cdot \varepsilon < 1$ ist.

Dass die genannten Gleichungen (40) bis (43) auch für negative Werte der Argumente Geltung behalten ist leicht einzusehen.

20. Wir betrachten jetzt die Gleichungen (9) in No. 5

$$\left(\frac{1}{2} A_1 + \frac{i}{2} B_1\right)^n = \frac{1}{2} A_n + \frac{i}{2} B_n,$$

$$\left(\frac{1}{2} A_1 - \frac{i}{2} B_1\right)^n = \frac{1}{2} A_n - \frac{i}{2} B_n$$

und setzen (man vergl. No. 15)

$$\begin{aligned}\frac{1}{2} A_1 &= \cos \left(\frac{x}{n} + \frac{yi}{n} \right) = \cos \frac{x}{n} \cdot \cos \frac{yi}{n} - \sin \frac{x}{n} \cdot \sin \frac{yi}{n} \\ &= \cos \frac{x}{n} \cdot \operatorname{cof} \frac{y}{n} - i \cdot \sin \frac{x}{n} \cdot \operatorname{fin} \frac{y}{n} \\ \frac{1}{2} B_1 &= \sin \left(\frac{x}{n} + \frac{yi}{n} \right) = \sin \frac{x}{n} \cdot \cos \frac{yi}{n} + \cos \frac{y}{n} \cdot \sin \frac{yi}{n} \\ &= \sin \frac{x}{n} \cdot \operatorname{cof} \frac{y}{n} + i \cdot \cos \frac{x}{n} \cdot \operatorname{fin} \frac{y}{n}.\end{aligned}$$

Mit Hülfe der in der vorhergehenden Nummer entwickelten Resultate wird

$$\begin{aligned}\frac{1}{2} A_1 &= \left(1 - \frac{\varepsilon x^2}{2n^2} \right) \left(1 + \frac{\eta y^2}{n^2} \right) - i \left(\frac{x}{n} - \frac{\delta x^3}{n^3} \right) \left(\frac{y}{n} + \frac{\delta' y^2}{n^2} \right) \\ &= 1 + \frac{u}{n^2} \\ \frac{1}{2} B_1 &= \left(\frac{x}{n} - \frac{\delta x^3}{n^3} \right) \left(1 + \frac{\eta y^2}{n^2} \right) + i \left(1 - \frac{\varepsilon x^2}{2n^2} \right) \left(\frac{y}{n} + \frac{\delta' y^2}{n^2} \right) \\ &= \frac{x + yi}{n} + \frac{u'}{n^2} \\ \frac{1}{2} A_1 + \frac{i}{2} B_1 &= 1 + i \frac{x + yi}{n} + \frac{1}{n^2} (u + i u').\end{aligned}$$

Auf die Angabe der in den zur Abkürzung geschriebenen Zeichen u und u' enthaltenen Glieder kommt es, wie sich bald zeigen wird, weiter nicht an; es genügt, einzusehen, daß dieselben den gemeinschaftlichen Factor $\frac{1}{n^2}$ besitzen, wobei den mit u und u' bezeichneten Größen endliche Werte (um den früher benutzten Ausdruck anzuwenden) zukommen, derart, daß $\frac{u}{n}$, $\frac{u'}{n}$ beliebig klein gemacht werden können. Die letzte Gleichung möge noch in folgende

$$\begin{aligned}\frac{1}{2} A_1 + \frac{i}{2} B_1 &= \left(1 + i \frac{x + yi}{n} \right) \cdot \left(1 + \frac{1}{n^2} \cdot \frac{u + i u'}{1 + i \frac{x + yi}{n}} \right) = \\ &= \left(1 + i \frac{x + yi}{n} \right) \left(1 + \frac{z}{n^2} \right)\end{aligned}$$

umgeformt worden, wobei auch $\frac{z}{n}$ beliebig klein ausfällt.

Erhebt man zur n^{ten} Potenz und beachtet, dafs

$$\frac{1}{2} A_n = \cos \left(n \cdot \frac{x + yi}{n} \right) = \cos (x + yi),$$

$$\frac{1}{2} B_n = \sin \left(n \cdot \frac{x + yi}{n} \right) = \sin (x + yi)$$

wird, so erhält man

$$\left. \begin{aligned} \left(1 + i \frac{x + yi}{n} \right)^n \cdot \left(1 + \frac{z}{n^2} \right)^n &= \cos (x + yi) + i \sin (x + yi) \\ \left(1 - i \frac{x + yi}{n} \right)^n \cdot \left(1 + \frac{z'}{n^2} \right)^n &= \cos (x + yi) - i \sin (x + yi) \end{aligned} \right\} (44)$$

Wir untersuchen nun, indem wir in der Gleichung (38) $x + yi$ durch $\frac{z}{n}$ ersetzt denken, zunächst

$$\begin{aligned} \left(1 + \frac{z}{n^2} \right)^n &= 1 + \frac{z}{n} + \frac{z^2}{1 \cdot 2 \cdot n^2} + \dots = \\ &= 1 + \frac{1}{n} \left[z + \frac{z^2}{1 \cdot 2 \cdot n} + \frac{z^3}{1 \cdot 2 \cdot 3 n^2} + \dots \right] = 1 + \frac{v}{n}; \end{aligned}$$

hier besitzt v einen endlichen (beliebig wenig von z verschiedenen)

Wert und es fällt, wenn man n groß genug wählt, $\frac{v}{n}$ beliebig klein aus. Demnach reducieren sich die linken Seiten der Gleichungen (44) beliebig genau auf

$$\left(1 \pm i \frac{x + yi}{n} \right)^n;$$

man findet also mittelst (39') und (39'')

$$\left. \begin{aligned} \cos (x + yi) + i \cdot \sin (x + yi) &= 1 + i \frac{x + yi}{1} + i^2 \cdot \frac{(x + yi)^2}{1 \cdot 2} \\ &\quad + i^3 \cdot \frac{(x + yi)^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \dots \\ \cos (x + yi) - i \cdot \sin (x + yi) &= 1 - i \frac{x + y}{1} + i^2 \cdot \frac{(x + yi)^2}{1 \cdot 2} \\ &\quad - i^3 \cdot \frac{(x + yi)^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \dots \end{aligned} \right\} (45)$$

und durch Addition resp. Subtraction und Division mit 2 resp. $2i$

$$\cos (x + yi) = 1 + i^2 \frac{(x + yi)^2}{1 \cdot 2} + i^4 \frac{(x + yi)^4}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} + \dots$$

$$\sin(x + yi) = \frac{x + yi}{1} + i \frac{(x + yi)^2}{1 \cdot 2 \cdot 3} + i^2 \frac{(x + yi)^3}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} + \dots,$$

oder wenn man i^2 durch -1 , i^4 durch $+1$ u. s. w. ersetzt,

$$(46) \begin{cases} \cos(x + yi) = 1 - \frac{(x + yi)^2}{1 \cdot 2} + \frac{(x + yi)^4}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} - \dots \\ \sin(x + yi) = \frac{x + yi}{1} - \frac{(x + yi)^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{(x + yi)^5}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} - \dots \end{cases}$$

Durch diese beiden Gleichungen ist die Aufgabe gelöst, $\cos$ und $\sin$ eines willkürlich gegebenen (endlichen) Argumentes mit beliebiger Genauigkeit zu berechnen. Wir heben, um die im Vorhergehenden betrachteten speciellen Fälle mit größerer Deutlichkeit hervortreten zu lassen, noch Folgendes hervor.

Nimmt man $y = 0$, so wird

$$(46') \begin{cases} \cos x = 1 - \frac{x^2}{1 \cdot 2} + \frac{x^4}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} - \frac{x^6}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6} + \dots \\ \sin x = \frac{x}{1} - \frac{x^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{x^5}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} - \dots \end{cases}$$

wo x irgend einen Bogen in einem Kreise mit dem Radius 1 (oder den doppelten Flächeninhalt eines Kreissectors) bedeutet.

Nimmt man $x = 0$, so entsteht

$$(46'') \begin{cases} \cos(yi) = \operatorname{cof} y = 1 + \frac{y^2}{1 \cdot 2} + \frac{y^4}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} + \frac{y^6}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6} + \dots \\ \sin(yi) = i \cdot \operatorname{fin} y = \frac{yi}{1} - \frac{y^3 i^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{y^5 i^5}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} + \dots \\ \text{also} \\ \operatorname{fin} y = \frac{y}{1} + \frac{y^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{y^5}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} + \dots \end{cases}$$

wo unter y der doppelte Flächeninhalt eines Hyperbelsectors, unter $\operatorname{cof} y$ und $\operatorname{fin} y$ die Längen (Coordinationen] OA und AC , wenn $OC = 1$ ist, zu verstehen sind.

Die Gliederanzahl auf den rechten Seiten von (45) bis (46''), welche von dem Werte von n abhängt, ist als unbegrenzt aufzufassen; wie viele derselben (vom ersten ab) summiert werden

müssen, damit die Abweichung vom wahren Werte einen beliebig klein gegebenen Bruch nicht überschreite, kann aus den Entwicklungen in No. 17 abgeleitet werden.

21. Für die in (45) dargestellten Größen ist folgende, durch wesentliche Eigenschaften derselben motivierte Schreibweise üblich. Man pflegt

$$\cos(x + yi) \pm i \cdot \sin(x + yi) = e^{\pm i(x + yi)} \quad (47)$$

zu setzen, dieselben also wie eine Potenz einer gewissen Basis e zu behandeln. Wie weit diese Schreibweise als gerechtfertigt betrachtet werden kann, und event. welche Einschränkungen bei ihrer Benutzung eintreten müssen, soll jetzt festgestellt werden.

Erstens ist

$$[\cos(x + yi) + i \sin(x + yi)] \cdot [\cos(x + yi) - i \sin(x + yi)] \\ = \cos^2(x + yi) + \sin^2(x + yi) = 1,$$

also

$$\cos(x + yi) - i \sin(x + yi) = \frac{1}{\cos(x + yi) + i \sin(x + yi)}$$

und umgekehrt. Benutzt man die Schreibweise (47), so wird

$$e^{-i(x + yi)} = \frac{1}{e^{+i(x + yi)}} = [e^{+i(x + yi)}]^{-1},$$

wie es die Regeln der Potenzrechnung verlangen.

Zweitens erhält man durch Multiplication von

$\cos(x + yi) \pm i \sin(x + yi)$ und $\cos(x' + y'i) \pm i \sin(x' + y'i)$ den Ausdruck

$$\cos(x + x' + yi + y'i) \pm i \sin(x + x' + yi + y'i),$$

welcher mit dem aus

$$e^{\pm i(x + yi)} \cdot e^{\pm i(x' + y'i)} = e^{\pm i(x + x' + yi + y'i)}$$

abgeleiteten übereinstimmt. Wie man bei der Division (statt Multiplication) derselben Größen zu verfahren hätte, kann leicht aus der unter (Erstens) angegebenen Betrachtung abgeleitet werden. Die für die Multiplication und Division zweier Potenzen derselben Basis gültigen Regeln bleiben also bestehen.

Drittens ergibt sich durch Potenzirung mit einem ganzzahligen Exponenten m , gleichgültig ob positiv oder negativ,

$$[\cos(x + yi) \pm i \sin(x + yi)]^m = \cos(mx + myi) \pm i \sin(mx + myi)$$

und gleichzeitig

$$\left[e^{\pm i(x + yi)} \right]^m = e^{\pm i(mx + myi)}.$$

Viertens. Setzt man $mx + myi = x' + y'i$, also $x + yi = \frac{x' + y'i}{m}$, so ergibt sich aus

$$\left[\cos \frac{x' + y'i}{m} \pm i \sin \frac{x' + y'i}{m} \right]^m = \cos(x' + y'i) \pm i \sin(x' + y'i),$$

dafs

$$(48) \quad \cos \frac{x' + y'i}{m} \pm i \sin \frac{x' + y'i}{m} = \sqrt[m]{\cos(x' + y'i) \pm i \sin(x' + y'i)}$$

sein mufs. Die auf der rechten Seite stehende m^{te} Wurzel besitzt aber m verschiedene Werte, die man, mit Benutzung des links geschriebenen Ausdrucks, in folgenden Gestalten angeben kann.

Die Werte von $\cos x'$ und $\sin x'$ ändern sich nicht, wenn man x' um beliebige ganze Vielfache von 2π vermehrt oder vermindert. Hieraus folgt — man beachte die Definition von $\cos(x + yi)$ und $\sin(x + yi)$ in No. 15 —, dafs dasselbe von $\cos(x' + y'i) \pm i \sin(x' + y'i)$ gilt, also

$$\begin{aligned} \cos(x' + y'i) \pm i \sin(x' + y'i) &= \cos(x' + 2k\pi + y'i) \\ &\quad \pm i \sin(x' + 2k\pi + y'i) \end{aligned}$$

sein mufs, wenn k eine beliebige positive oder negative ganze Zahl bedeutet. Die Gleichung (48) kann also auch so geschrieben werden:

$$\begin{aligned} \cos\left(\frac{x' + y'i}{m} + \frac{2k\pi}{m}\right) \pm i \sin\left(\frac{x' + y'i}{m} + \frac{2k\pi}{m}\right) &= \\ \sqrt[m]{\cos(x' + y'i) \pm i \sin(x' + y'i)}. \end{aligned}$$

Nimmt man $k = 0, 1, 2, \dots, m - 1$, so entstehen linkerseits m verschiedene Werte (da die noch möglichen positiven und negativen Werte von k Argumente liefern, welche sich von den durch die eben genannten Zahlen bestimmten jedenfalls nur um ganze Vielfache von 2π unterscheiden) derselben m^{ten} Wurzel. Es läfst sich demnach nicht entscheiden, ob man

$$\left(\sqrt[m]{e^{\pm i(x' + y'i)}} = e^{\pm i \frac{x' + y'i}{m}} \text{ oder } = e^{\pm i \frac{x' + y'i}{m} \pm \frac{2k\pi i}{m}} \right)$$

wo $k = 1, 2, 3, \dots, m-1$ sein kann, zu setzen habe. Gleichzeitig erkennt man, daß es durchaus fraglich ist, ob man in (47) unter e eine irgendwie bestimmbare Zahl zu verstehen, und nicht vielmehr die dort benutzte Schreibweise nur als eine in den Fällen erstens bis drittens anwendbare Abkürzung zu betrachten habe.

22. Die zuletzt in Frage gestellten Punkte lassen sich für eine Klasse von Werten des Arguments folgendermaassen erledigen. Nimmt man $x = 0$ und setzt dann $\cos y$ statt $\cos yi$, $i \sin y$ statt $\sin yi$, so wird

$$\cos yi \pm i \sin yi = \cos y \mp i \sin y = e^{\mp y}, \quad (49)$$

eine Gleichung, in welcher nur reelle Werte auftreten. Die unter erstens, zweitens, drittens angestellten Betrachtungen gelten ohne weiteres. Was den vierten Fall betrifft, so besitzt zwar die in der vorhergehenden Nummer betrachtete m^{te} Wurzel ebenfalls m verschiedene Werte; von diesen ist aber nur einer reell. Setzt man also

$$e^{\mp y} = \cos y \mp i \sin y = 1 \mp \frac{y}{1} + \frac{y^2}{1 \cdot 2} \mp \frac{y^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{y^4}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} \mp \dots$$

so wird, wenn man unter der m^{ten} Wurzel aus $e^{\mp y} = \cos y \mp i \sin y$ nur den einen wirklich vorhandenen reellen Wert versteht, die Gleichung

$$e^z = 1 + \frac{z}{1} + \frac{z^2}{1 \cdot 2} + \frac{z^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \dots \quad (50)$$

für alle reellen Werte von z Geltung haben und zwar der Art, daß man für die Potenzen einer gewissen Basis e Multiplicationen, Divisionen, Potenzierungen (mit reellen Exponenten) und auch Wurzelberechnungen, so lange es sich nur um reelle Zahlenwerte handelt, eindeutig ausführen kann. Hiernach sind alle die in (49) angegebenen reellen Zahlen Potenzen einer und derselben Zahl e , welche man mittelst

$$e^1 = 1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} + \dots = 2,718281 \dots \quad (51)$$

beliebig genau darstellen kann. Die reellen Potenzen dieser Basis sind die durch die Gleichung (50) bestimmten Zahlen.

Dagegen soll es für die übrigen Werte des Arguments $x + yi$, in welchen x nicht Null ist, mit den bisher erlangten Resultaten sein Bewenden haben. Auch die zum eigentlichen Abschlufs notwendige Umkehrung der vorhergehenden Betrachtungen, nämlich die Aufgabe, zu einem willkürlich gegebenen $\cos (x + yi) = \frac{1}{2} a$, oder $\sin (x + yi) = \frac{1}{2} b$ das zugehörige Argument $(x + yi)$ zu finden, möge aufser Acht bleiben. Man vergleiche über diese Punkte beispielsweise: Götting, Einleitung in die Analysis, Berlin 1880, J. A. Wohlgemuth's Verlag (Max Herbig), S. 73 bis 120.

In J. A. Wohlgemuth's Verlagsbuchhandlung (Max Herbig) in Berlin W., Bülowstrasse 11, erschien:

Einleitung in die A n a l y s i s

von

R. Götting,

Professor am Gymnasium zu Torgau.

1880. gr. 8^o. 188 S. brochirt 3 Mark.

Das Buch beginnt mit der Combinationslehre und dem Beweis des binomischen Lehrsatzes für positive ganze Exponenten, dem sich die Lehre von den arithmetischen Reihen höherer Ordnung anschliesst. Dann kommt das Moivre'sche Theorem und die Exponentialreihe, die Logarithmenreihe und die Reihe für $\arctan x$, sodann der allgemeine binomische Lehrsatz und die Reihen für $\sin x$, $\cos x$ und $\arcsin x$. Die notwendigen Sätze der Reihenlehre sind an passender Stelle eingefügt; jedem Abschnitt ist eine Reihe zweckmässig gewählter Aufgaben beigegeben.

Das Buch ist ausserordentlich sorgfältig gearbeitet. Die Sätze sind in möglichster Allgemeinheit bewiesen, so z. B. die Geltung der binomischen Reihe für $(1 + \rho e^{i\omega})^x + y^i$ unter genauer Angabe der einschränkenden Bedingungen. Dabei hat der Verfasser vielfach eigene Wege eingeschlagen, um die vorgesteckten Ziele zu erreichen.

Aus dem Gesagten folgt, dass Lehrern und angehenden Mathematikern das Buch zu empfehlen ist.

Blätter f. Realschulwesen.

Das Werk verfolgt den Zweck, den Uebergang von der elementaren Mathematik zur höheren Analysis zu vermitteln. Sein Inhalt lässt sich kurz als umfassende Behandlung des binomischen Satzes kennzeichnen: das erste Kapitel liefert nach der Behandlung der Lehre von den Combinationen, den Substitutionen, den figurirten Zahlen die Entwicklung des binomischen Satzes unter der Voraussetzung eines ganzen positiven Exponenten; die folgenden Kapitel beschäftigen sich mit der Verwendung complexer Grössen der Exponentialfunction und der daraus abgeleiteten Kreisfunctionen; das letzte Kapitel gibt eine Theorie der unendlichen Producte und des allgemeinen binomischen Satzes. Alle auf dem eingeschlagenen Wege berührten Gebiete werden soweit als möglich und nöthig ist elementar und übersichtlich behandelt. Besondere Sorgfalt ist auf die Behandlung des Begriffes und Umfanges der Stetigkeit verwendet. Beispiele und Aufgaben sind beigegeben.

Strassburg i. Els.

E. Netto.

Ein sehr verdienstliches Lehrbuch der algebraischen Analysis, durchaus nach den besten und neuesten Methoden gearbeitet und auch an originellen Entwicklungen nicht arm. Insbesondere empfiehlt sich die Darstellung der Combinationslehre durch den Umstand, dass in ihr (§ 4 ff.) auch den Substitutionen der gehörige Platz eingeräumt wird. Diese für die höhere Algebra geradezu fundamentale Theorie war bis jetzt nicht leicht zu erlernen, da die

allerdings treffliche Einleitung in die Substitutionenlehre von E. Netto nicht als gesonderte Schrift, sondern blos als Zeitschrift-Artikel (Hopfes Archiv 1878) erschienen war. Auch den Anwendungen der Combinatorik, d. h. den Binomialcoefficienten, dem Wahrscheinlichkeitscalcül und den höheren Differenzreihen wird in dem Götting'schen Buche mehr als sonst Rechnung getragen. Die Exponentialfunctionen schliessen sich, was ebenfalls von pädagogischer Seite wohl beachtet zu werden verdient, unmittelbar an die geometrischen Progressionen an. Die Rechnung mit complexen Grössen, welche sich ja beim weiteren Fortschreiten der Wissenschaft stets mehr und mehr als die Basis der ganzen Analysis herausstellt, wird gleich an die Spitze des zweiten Capitels gestellt und (§ 27) durch eine grössere Anzahl gut gewählter Aufgaben erläutert. Nachdem sodann der Begriff der Reihenconvergenz festgestellt ist, werden die wichtigsten Reihen abgeleitet und discutirt; dass dabei von der graphischen Repräsentation der complexen Grössen auf der Zahlenebene ein sehr umfassender Gebrauch gemacht wird, versteht sich nach dem Vorigen von selbst. Einen ganz neuen Weg betritt der Verfasser bei der Herleitung von $\log(1+x)$ und von $\arctang x$; er gründet die bezüglichen Reihen nämlich auf die Reihenentwicklung des Ausdruckes

$$(x + y + xy)^n.$$

Die Convergenzkriterien werden, was in den dem Referenten bekannten elementaren Lehrbüchern der Analysis noch nicht üblich und trotzdem sehr nothwendig ist, ebenfalls geometrisch, mit Hilfe der um bestimmte ausgezeichnete Punkte als Centra beschriebenen Convergenzkreise, interpretirt. Hieran reihen sich nun Anwendungen aller Art, die Reihen für Sinus und Cosinus der vielfachen Winkel, gewisse aus Binomialcoefficienten gebildete Reihen und vieles Andere; den Schluss des Ganzen bilden die unendlichen Factorfolgen für Sinus und Cosinus und die Reihen für $\arcsin$ und $\arccos$ $(x + yi)$.

Zeitschrift für mathem. u. naturw. Unterricht XII. 4.

Das Werk beschäftigt sich mit der Darstellung und Einübung derjenigen Operationen, welche den Exponential- und logarithmischen Functionen und dem allgemeinen binomischen Satze zur Grundlage dienen, sowie mit der Begründung der hierher gehörenden Sätze und der Entwicklung einer Anzahl sich anschliessender Reihen. Es zerfällt in vier Theile, der erste behandelt die Permutationen, den binomischen Satz und besonders die arithmetischen Reihen; der zweite die geometrischen Reihen und die Exponentialfunctionen, der dritte die Functionen des Logarithmus und Arcus Tangentis, und der vierte behandelt den allgemeinen binomischen Satz und seine Anwendung. Das Buch ist klar und bei aller Ausführlichkeit doch nirgends breit. Die Beigabe einer grösseren oft mit Andeutung der Lösung versehenen Anzahl von Aufgaben ist dem Ganzen förderlich.

Pädag. Blätter f. Lehrerbildung.

Druck von Bajanz & Studer, Berlin W., Linkstrasse 9.

Götting, Rob.

Die Functionen Cosinus und Sinus beliebiger Argumente in elementarer
Darstellung von Rob. Götting, Professor am Gymnasium zu Torgau

Berlin 1881

Math.p. 179 ub

urn:nbn:de:bvb:12-bsb11650924-2